arXiv:1703.04069v1 [math.HO] 12 Mar 2017

Consistencia, no-trivialidad y redundancia en matemática.

Eleonora Catsigeras[1]

14 de marzo de 2017

[1]Instituto de Matemática y Estadística "Rafael Laguardia"
Universidad de la República,
Montevideo, Uruguay
Corrreo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

Resumen

Exploramos los criterios racionales formales e informales de consistencia, no-trivialidad y redundancia en la investigación matemática actual. Desarrollamos la discusión paradigmática analizando las diferentes concepciones de esos criterios, desde las lógico-formales hasta las informales (pero aún racionales). Ilustramos la discusión con ejemplos concretos extraídos de la actividad de investigación matemática, particularmente la publicada en los últimos cincuenta años en la teoría matemática de los sistemas dinámicos deterministas.

MSC 2010: 00A30, 03A05.

Palabras y frases clave: Racionalidad formal e informal, filosofía de la matemática, consistencia, no-trivialidad, profundidad matemática, redundancia matemática.

Abstract

We explore the rational, formal and non-formal criteria of consistency, non-triviality and redundancy in the mathematical research now a days. We develop a paradigmatic discussion by analysing the different conceptions of those criteria, from the logic-formal ones to the non formal ones (but still rational criteria).We illustrate the discussion with concrete examples obtained form the mathematical reseach, particularly from the published results that were published in the last 50 years in the mathematical theory of deterministic dynamical systems.

MSC 2010: 00A30, 03A05.

Key words and phrases: Formal and non-formal rationality, philosophy of mathematics, consistency, non-triviality, mathematical depth, mathematical redundancy.

1. Introducción

Hilary Putnam [15] defendió que en toda justificación racional hay implícito un juicio de relevancia previo. Trata la relevancia en términos de un modelo teórico de valores en la ciencia. Bajo esa premisa, exploraremos tres de las muchas concepciones de las que surgen los juicios de relevancia de enunciados en la matemática actual, concepciones éstas tanto formales como informales.

Por un lado, la exploración a lo largo de este trabajo es metaparadigmática, típicamente filosófica, en la que discutiremos algunas de las concepciones racionales previas a los juicios de valor que la investigación matemática actual asigna a sus enunciados. Por otro lado, nuestra exploración y discusión están basadas en la exposición de ejemplos de la práctica cotidiana de la investigación matemática, que muestra cómo se interpretan en los hechos dos diferentes concepciones filosóficas de racionalidad, diferentes pero complementarias, la lógico-formal y la informal.

Adoptaremos un método filosófico por el cual, para sostener un argumento filosófico racional relativo al quehacer de las ciencias, es necesario (o por lo menos muy conveniente):

1) nutrir el argumento con exposición de ejemplos;

2) no especular sobre cómo una palabra o concepto debería ser usado, sino observar cómo se usa y aprender de ello.

(Wittgenstein [23], citado en Cook [4, p. 445])

La metodología de esta investigación, acorde a su propósito, es multidisciplinaria. Comprende dos disciplinas que aspiramos integrar en este trabajo: la matemática y la filosofía de la ciencia. Tomamos consciencia que los métodos de exploración y los lenguajes de comunicación específicos a ambas disciplinas son en la actualidad muy disímiles. Entre otras razones, estas disimilitudes son debidas al crecimiento y diversificación de ambas disciplinas, y a la diferenciación creciente de los propósitos de investigación. Sin embargo, la metodología interdisciplinaria que adoptamos aquí intenta combinar en forma coherente los dos alfabetos de formas y lenguajes, uno tomado de la matemática y otro de la filosofía de la ciencia.

1.1. Convención.

Acordamos la siguiente convención, usual entre los investigadores matemáticos. La palabra "enunciado" , lejos de acotar el objeto de estudio a su mera forma de expresión, se referirá al contenido matemático de un teorema, una definición o un axioma, en sí mismo - sobre el cual discutiremos las características meta-matemáticas - bajo cualquier formulación concreta con la que aparezca ese contenido. Se refiere entonces, por ejemplo, al teorema intrínsecamente, es decir, a las ideas matemáticas en sí mismas que el teorema involucra o relaciona, y a esta relación, independientemente de su lenguaje y fórmulas, de su notación, expresión o formas de comunicación concretas.

1.2. Propósito y tesis a defender.

La noción de "relevancia" que adoptaremos es una noción de consenso social. Se desprende del uso habitual de esa palabra o concepto en la práctica de evaluación de resultados nuevos en la comunidad de investigadores matemáticos. En particular, hemos considerado algunos de los juicios de valor de publicaciones matemáticas, realizados por científicos matemáticos independientes de los autores, y publicados en Zentralblatt für Mathematik y en Mathematical Reviews of the A.M.S.

Generalmente en un juicio de relevancia, la práctica usual de la comunidad de matemáticos, lejos de considerar únicamente criterios lógico-formales y exactos, adopta e integra (muchas veces con predominancia sobre la formalidad lógica) otros criterios que, aunque informales, son aún racionales. Justamente, la racionalidad de estos criterios informales, además de los lógico-formales, y la de su integración con estos en un juicio de valor de enunciados matemáticos, es la tesis central que defenderemos en este texto.

Nos enfocaremos en el análisis, la discusión y la ilustración mediante ejemplos concretos, de tres conceptos claves y previos a los juicios de relevancia en la práctica actual de la investigación matemática (expondremos al final de esta introducción los motivos de tal enfoque). En efecto, a lo largo de las diferentes secciones de este trabajo discutiremos nociones que se aplican en los juicios de valor de contenidos matemáticos, en lo relativo a:

- consistencia,
- no-trivialidad, y
- no-redundancia.

Aunque cuando el matemático declara que un teorema es "relevante" o "bueno" o "valioso", no solo está afirmando que es consistente, no-trivial y no-redundante, nos centraremos en el análisis de esas tres nociones porque son ellas, desde los puntos de vista lógico-formal, semi-formal e informal, los principales y primeros (en orden cronológico) criterios de relevancia que se tienen en cuenta en la práctica usual de evaluación de enunciados matemáticos nuevos. Muy frecuentemente son ellos tres, los únicos pre-requisitos necesarios para un juicio de valor posterior, bastante más complejo, que integra una combinación graduada y no cuantitativa de esos y varios otros criterios racionales de relevancia. Así, los tres mencionados son condiciones necesarias previas para una justificación de valor de los enunciados matemáticos, aunque normalmente no sean suficientes.

2. Criterios de consistencia lógico-formal y experimental.

Para definir consistencia definamos antes de concepto de contradicción. Dos enunciados matemá- ticos son contradictorios cuando de uno de ellos se puede deducir la negación del otro. Más restrictivamente, según (Tarski, [21, p. 20]) dos sentencias son contradictorias si una es equivalente a la negación de la otra. Observamos que la definición de Tarski es restrictiva al requerir equivalencia entre sentencias. Sin embargo, lo único que se necesita para la inconsistencia de una pareja de proposiciones matemáticas es que la una implique la negación de la otra, y no necesariamente que esta otra implique la negación de la primera.

La negación de un teorema es lógicamente diferente de la afirmación contraria al teorema. En efecto, la afirmación contraria a un teorema de la forma "si se cumple A entonces se cumple B" es la afirmación "si no se cumple A entonces no se cumple B" . La verdad del teorema es independiente de la verdad o falsedad de su afirmación contraria. Por lo tanto, es consistente la pareja de afirmaciones compuestas por un teorema y su proposición contraria. En cambio, ese mismo teorema que enuncia "si se cumple A entonces se cumple B" , tiene como negación "existe un ejemplo que cumple A y no cumple B" (llamado contraejemplo). El teorema es verdadero (si no lo fuera, no se llamaría teorema) si y solo si su negación es falsa. Existe inconsistencia entre el teorema y su negación, la existencia del contraejemplo.

Enunciados ya probados y futuros enunciados en una subdisciplina matemática (es decir, bajo un mismo sistema de definiciones y/o axiomas) son mutuamente consistentes cuando de ningún subconjunto de ellos se puede deducir dos enunciados contradictorios. Así, un nuevo enunciado, o un nuevo supuesto en una subdisciplina matemática, es consistente con el estado de la subdisciplina, si y solo si del conjunto de todos los enunciados previos ya probados en ella no se puede deducir la negación del nuevo enunciado o del nuevo supuesto.

Tarski (1946, [21, p. 135]) define la consistencia global de una disciplina deductiva, en vez de definir la consistencia de un nuevo enunciado en relación al conjunto de enunciados previamente aceptados. En efecto según Tarski, una teoría deductiva es llamada consistente o no contradictoria si ninguna pareja de afirmaciones de la teoría está compuesta por una afirmación y su negada.

Sin embargo, esta definición global no es exactamente la misma que la que se usa en la matemática contemporánea. En efecto, la matemática de hoy en día admite (como criterio racional informal) que cualquiera de sus subdisciplinas está compuesta solamente por la cantidad finita de enunciados, mutuamente consistentes, aceptados por los matemáticos que investigan en esa subdisciplina, y por los que se pueden deducir de aquellos en forma trivial (definiremos trivialidad en la próxima sección). Es decir, no componen la subdisciplina todos los enunciados verdaderos posibles que se puedan deducir en forma no trivial en el futuro, a partir de los ya aceptados, ni los que se puedan crear en el futuro bajo nuevos presupuestos o definiciones. La matemática denomina preguntas abiertas a los enunciados no trivialmente verdaderos ni trivialmente falsos que relacionan conceptos definidos en la subdisciplina. Pero no emite un juicio de consistencia de las preguntas abiertas en relación a los enunciados ya aceptados de la subdisciplina.

Estamos afirmando que al incorporar nuevos enunciados (demostrados y aceptados) la teoría no se conserva la misma, es decir, no se mantiene inmutable. La teoría o subdisciplina de la matemática, según la conciben los investigadores matemáticos, evoluciona con el tiempo, es dinámica, aunque cada enunciado ya incorporado no cambie. Se modifica el conjunto de enunciados ya demostrados y aceptados, por incorporación de los nuevos, pero no por sustracción de los anteriores. Por lo tanto, cambia también el conjunto de preguntas abiertas. Según la definición global de consistencia de Tarski, podría interpretarse que para juzgar la consistencia de una teoría, se requeriría a priori el conocimiento de la totalidad de sus enunciados de manera estática, para saber si la disciplina es consistente o no lo es. Esta interpretación requeriría del conocimiento a priori de todos los posibles enunciados verdaderos de la teoría. En cambio, la intepretación parcial y dinámica de consistencia evalúa en forma continua el conjunto finito y cambiante de enunciados verdaderos (ya demostrados) de la disciplina en cada momento.

Observamos que la evolución de la disciplina no solo se debe a que se incorporan nuevos enunciados que aparecen como resultados de la investigación matemática. Se debe también a que para que estos nuevos enunciados sean consistentes con el conjunto de los enunciados anteriores, frecuentemente requieren la introducción de supuestos o definiciones adicionales.

Veamos un ejemplo de consistencia que requirió la introducción de conceptos nuevos. Dentro de la teoría ergódica diferenciable, una subdisciplina muy específica desarrollada durante los últimos 45 años, pero que presenta aún numerosos problemas abiertos, es la llamada teoría de Pesin, y como parte de ésta, la teoría de medidas SRB (i.e. "Sinai-Ruelle-Bowen"), originada entre otros, en el artículo precursor de Sinai en 1972, [18]. Esas dos sub-ramas de la teoría ergódica diferenciable asumen que el sistema dinámico bajo estudio tiene regularidad C^2: el sistema es diferenciable hasta segundo orden con derivadas hasta segundo orden continuas. La regularidad C^2 es necesaria para las demostraciones conocidas de algunos teoremas muy populares en esas subdisciplinas. En efecto, en (Robinson-Young, [16, pp. 159-176]) se muestra un contraejemplo sin regularidad C^2, para el cual algunos resultados de la teoría de Pesin no rigen. El contraejemplo de Robinson y Young es solo de clase C^1: el sistema es diferenciable solamente hasta primer orden con derivada primera continua, pero no lo es hasta segundo orden. En particular, la existencia de medidas SRB[1] es falsa en ese contraejemplo.

Como contraparte, en (Enrich-Catsigeras, [5, p. 740]) se demuestra que todos los sistemas continuos, incluyendo los de clase C^1 y los de clase C^2, poseen cierto tipo de medidas abstractas llamadas "SRB-like" (i.e. parecidas a las medidas llamadas SRB), definidas como las que presentan la propiedad de observabilidad a través de los promedios temporales asintóticos de conjuntos

[1]Estamos considerando las medidas SRB como las que satisfacen ciertas propiedades de continuidad absoluta. Más precisamente, la proyección a lo largo de la foliación estable y las medidas condicionales respecto a la foliación inestable deben ser absolutamente continuas.

Lebesgue-positivos de órbitas del sistema. Esta propiedad de observabilidad es exhibida en particular por todas las medidas SRB de los sistemas diferenciables, en los casos en que las SRB existen. Es decir, todas las medidas SRB de los sistemas dinámicos diferenciables son casos particulares de medidas SRB-like, y estas últimas siempre existen, aunque el sistema no sea diferenciable.

¿No es el nuevo enunciado de existencia de medidas SRB-like inconsistente con los contraejemplos conocidos previamente para los que no existen medidas SRB? La respuesta es "no, no lo es", pues el nuevo teorema se refiere a las medidas SRB-like y no a las SRB solamente. Éstas son, cuando existen, solo caso particulares de aquellas. Por lo tanto pueden no existir las SRB, como en el contraejemplo previamente conocido de Robinson y Young, y sí existir las SRB-like como se demuestra en el nuevo teorema.

En conclusión, la consistencia del nuevo teorema con el cuerpo de la subdisciplina desarrollada hasta ese momento, requirió de la creación e introducción de un concepto matemático nuevo: el de las medidas SRB-like o propiedad de observabilidad. Este concepto nuevo es consistente con el concepto previo de medida SRB, y más aún, aparentemente fue extraído o inspirado en el descubrimiento de la propiedad necesaria de observabilidad de éstas.

Discutamos ahora la concepción filosófica de consistencia experimental, además de la consistencia lógico-formal que ya expusimos. Esta consideración de conceptos filosóficos diferentes de consistencia matemática (pero no opuestos sino complementarios), permite diversificar las estrategias para excluir el error. En matemática, la consistencia experimental es un criterio de relevancia de un nuevo teorema: significa que el teorema nuevo que se demuestra, no solo es consistente desde el punto de vista lógico-formal con los enunciados aceptados hasta el momento en la subdisciplina matemática a la cual se incorpora, sino que explica (o demuestra la necesidad de) propiedades matemáticas ya observadas previamente en el comportamiento de ejemplos o casos particulares no-triviales, que por alguna razón son considerados relevantes o paradigmáticos dentro de la disciplina.

Es más fácil encontrar ejemplos donde la consistencia experimental es relativa a la investigación de la matemática aplicada a otras ciencias, que de la matemática pura. Así, por ejemplo, el teorema de (Mirollo-Strogatz, [13, pp. 1645-1662]) en la subdisciplina matemática de los sistemas dinámicos deterministas, (como rama de la bio-matemática, y en particular aplicada a la neurociencias), demuestra la necesaria sincronización del evento llamado "espiga" o "disparo" de las neuronas de una red excitatoria. Para poder enunciar y demostrar ese teorema, están definidas las neuronas, la red que conforman, y el fenómeno de espiga, de forma matemática abstracta modelando la red o subred neural[2] biológica concreta. Ese teorema, desde el punto de vista lógico-formal de su enunciado y de su demostración, es relevante porque entre otros motivos, es consistente con el fenómeno de sincronización de espigas observado experimentalmente mediante encefalogramas en ciertas subredes neurales biológicas excitatorias estudiadas previamente por los neurocientíficos. Por lo tanto, la relevancia por consistencia experimental del teorema de Mirollo y Strogatz, está en parte fundado en la relevancia de los resultados previos obtenidos experimentalmente en esas otras disciplinas o ciencias, a las cuales el teorema se aplica. Este criterio de relevancia de enunciados matemáticos aplicados o aplicables, basado en la relevancia de resultados experimentales previos o posteriores, con los cuales el enunciado es consistente, no es un criterio que se limita a verificaciones lógico-formales. Es racional informal, apelando al siguiente argumento de Putnam sobre la racionalidad de las ciencias:

Los procedimientos mediante los que decidimos (la relevancia) tienen que ver con que conside-

[2]Cuando la red está definida en forma abstracta matemática, o diseñada por la ingeniería como red artificial, se llama red neuronal. Cuando es una red de neuronas biológicas del sistema nervioso de un animal se llama red neural.

rada como un todo, exhiba ciertas 'virtudes', o no las exhiba. Estoy suponiendo que el procedimiento ... (de decisión), no puede analizarse correctamente como un procedimiento de verificación ... oración por oración. Estoy suponiendo que la verificación... es una cuestión holística, que son los sistemas... enteros los que se enfrentan al tribunal de la experiencia..., y que el juicio resultante es una cuestión un tanto intuitiva, que no puede formalizarse a menos que formalicemos toda la psicología humana... (Putnam 1981, [15, cap. 6, par. 1])

Aunque es más difícil encontrar ejemplos, en la investigación matemática pura la consistencia experimental también es un criterio racional informal complementario al lógico-formal, y aplicable a juicios de relevancia de enunciados nuevos. Por ejemplo, Anosov en 1967 [1] definió una clase de difeomorfismos, y dio ejemplos particulares de ellos, que son uniformemente hiperbólicos en forma global en todo el espacio. Estos difeomorfismos fueron posteriormente llamados "difeomorfismos de Anosov" . Todos los ejemplos de esta clase de difeomorfismos estudiados hasta el día de hoy (descontados aquellos ejemplos para los que aún no se conocen las propiedades ergódicas), cumplen la siguiente propiedad:

Si un difeomorfismo de Anosov es conservativo[3]*, entonces es ergódico*[4]*.*

El enunciado anterior no es un teorema. Es solamente el resultado obtenido en todos los ejemplos de difeomorfismos de Anosov conservativos para los cuales se pudo estudiar la ergodicidad. Es aún una pregunta abierta si la proposición anterior es verdadera o falsa para la totalidad de los difeomorfismos de Anosov conservativos. Es decir, la ergodicidad de los difeomorfismos de Anosov conservativos es un resultado "experimental" de la matemática pura; y lo llamamos "experimental" porque su verificación, aunque sea lógico-formal y abstracta, es aplicable solamente uno a uno, a casos particulares que no son la generalidad.

En el año 1972, Sinai [18] demostró que todos los difeomorfismos de Anosov conservativos que son de clase C^2, son ergódicos. Este teorema de Sinai, además de ser relevante según los criterios de no-trivialidad que discutiremos en la sección siguiente, lo es por su propiedad de consistencia experimental con todos los ejemplos de difeomorfismos de Anosov cuya ergodicidad era conocida en forma particular, caso a caso, hasta el momento de su aparición. Y aunque no demuestra la ergodicidad en todos los ejemplos posibles (pues excluye los difeomorfismos que no son de clase C^2), extiende la propiedad de ergodicidad, antes conocida ejemplo a ejemplo solamente, a toda una subclase de difeomorfismos de Anosov conservativos.

Concluimos que el criterio de consistencia experimental de un nuevo teorema es un concepto racional informal, ya que explica en general las propiedades exhibidas en ejemplos previamente considerados relevantes en esa subdisciplina; y la relevancia no es una propiedad verificable mediante un algoritmo de deducción, ni apelando a argumentos lógico-formales exclusivamente.

En las próximas secciones extenderemos las estrategias que hemos utilizado hasta ahora, que incluyen dos concepciones filosóficas diferentes pero complementarias de consistencia matemática (la lógico-formal y la experimental), para discutir también la no-trivialidad y la redundancia de los enunciados matemáticos.

[3] Un difeomorfismo se llama conservativo si preserva la forma de volumen en el espacio donde actúa.

[4] Un difeormofismo se llama ergódico si los promedios temporales asintóticos de funciones observables a lo largo de casi todas sus órbitas, son iguales al promedio espacial o valor esperado de la función que se observa.

3. Criterios de no-trivialidad lógico-formal e informal.

El adjetivo “no-trivial” es comúnmente usado por los matemáticos para indicar que un teorema no es obvio o no es fácil de demostrar (Ver por ejemplo Weisstein, [22, p. 1]). Aquí, es importante no sustituir la conjunción “o” por la conjunción “y” . Es decir, un teorema puede ser no-trivial, si no es obvio lo que enuncia, aunque su demostración sea breve y fácil de entender. Pero esta definición, requiere definir primero qué significa obviedad, y qué significa fácil de demostrar. Y estas propiedades de un teorema no son propiedades lógico-formales, sino informales, aunque plausibles de producir un criterio racional de relevancia del teorema. Como dependen del contexto y del investigador (matemático o no), el definido más arriba es un criterio informal. Analizaremos más adelante este criterio. Es el que adoptamos como criterio de no-trivialidad de un teorema, justificando nuestra elección a lo largo de la siguiente discusión.

Veamos varios posibles significados, estrechamente vinculados entre sí, de la no-trivialidad lógico-formal. Para ello definamos su negación, la trivialidad. Una nueva afirmación es trivial, desde el punto de vista estricto lógico-formal, si de los enunciados (definiciones, axiomas, teoremas) conocidos en la subdisciplina matemática desarrollada hasta el momento, se puede deducir esa afirmación. Esta definición no es nunca empleada por los matemáticos investigadores. Si la aplicaran, todos sus resultados serían triviales, independientemente de la profundidad de los significados, de las construcciones de nuevos conceptos matemáticos involucradas en su obtención, y de la dificultad y longitud de las demostraciones. Son estos factores, y no la definición estricta lógico-formal, los decisivos en un juicio de trivialidad o no-trivialidad de enunciados para los matemáticos.

Agreguemos entonces la siguiente condición: una nueva afirmación es trivial, desde un punto de vista cuantitativo lógico-formal, si se puede deducir mediante una cantidad breve de pasos deductivos directos. Para lo cual, es necesario definir a priori la cota superior numérica de la “cantidad breve” y la lista finita de los pasos deductivos “elementales o directos” .

En este sentido, una afirmación es trivial para un matemático si su demostración es un “ejercicio” . Efectivamente, el matemático puro que no trabaja en aplicaciones, no publica como resultados de investigación lo que considera ejercicios, pues los evalúa como no trascendentes a la investigación matemática en su especialidad, y por lo tanto irrelevantes para el avance de ésta. Pero, en sentido contrario, desde el punto de vista del matemático aplicado, y de los investigadores de otras ciencias que aplican la matemática, la postura de considerar triviales los enunciados brevemente deducibles a partir de lo ya conocido en la subdisciplina matemática que se aplica, resulta una limitación inadecuada. En efecto, según el premiado Nobel en física, Richard Feynman [6],“los matemáticos designan cualquier teorema como trivial, una vez que su prueba ya fue obtenida y es conocida, ... Por lo tanto hay solo dos tipos de proposiciones matemáticas verdaderas: las triviales y las aún no demostradas” (Feynman 1997, citado en Weisstein, [22, p. 1]).

Los criterios de “no-trivialidad” matemática que la mayor parte de los matemáticos investigadores utilizan, ya sea en matemática pura o aplicada, no son únicamente los lógico-formales. Esta es la primera de las razones por las que preferimos afiliarnos al criterio racional informal de no-trivialidad, definido al principio de esta sección, y que discutiremos a continuación.

Entre otros autores, Shanks [17] define “el opuesto de un teorema trivial ...(como) un ’teorema profundo’. Cualitativamente, un teorema profundo es un teorema cuya prueba es larga, complicada o difícil, o (cuyo enunciado) involucra temas de la matemática que no están obviamente relacionadas...” (Shanks, [17, pp. 64-66]) Esta definición de no-trivialidad matemática, como sinónimo de profundidad del enunciado, en cuanto a la relación entre conceptos matemáticos no primariamente vinculados, es recogida y preferida en la actualidad por buena parte de los investigadores en matemática. Por ejemplo (Tao, [20, p. 623-624]) enumera veintidós criterios no exhaustivos para explicar qué es la "buena" matemática. Entre esos criterios, el concepto de profundidad de un resultado matemático es considerado por Tao como una característica de evidente no-trivialidad, porque, entre otras razones, capta un fenómeno más allá del alcance de herramientas más elementales.

Según Gray [8] "los matemáticos usan la palabra 'profundo' para referir una alta apreciación de un concepto, teorema o demostración. Su primer uso en matemáticas fue una consecuencia del trabajo de Gauss en teoría de números y el acuerdo entre sus sucesores que partes específicas de ese trabajo mostraban propiedades estructurales de la matemática... en contraste al alcance menos estructural y más orientado a la solución de problemas" de los trabajos matemáticos menos profundos (Gray, [8, p. 177]).

La profundidad de un teorema está referida al criterio racional informal de no-trivialidad, y a la vinculación a través de su enunciado de estructuras matemáticas no directamente relacionados o evidentes en forma previa. Cuando esta vinculación resulta sorprendente o inesperada, aún si la demostración formal es breve y sencilla, el teorema es profundo. Es un criterio informal, pues no solo es irreducible a algoritmos formales, sino que involucra al sujeto en su percepción de profundidad. Aunque informal, es un criterio racional de no-trivialidad, por ejemplo cuando se la justifica y fundamenta matemáticamente, de manera independiente de la demostración formal del teorema. Así, este criterio racional de no-trivialidad es inherente al enunciado mismo, en forma desligada de su demostración. Puede ser además, inmutable en el tiempo, aunque en el futuro puedan encontrarse demostraciones formales muy simples del mismo teorema.

Ilustremos el argumento anterior con un ejemplo que no corresponde a la investigación de la matemática de hoy en día, sino a la matemática de la Antigüedad. El teorema de Pitágoras es no-trivial, intrínsecamente, pues en forma inesperada y sorpresiva relaciona las operaciones de suma y multiplicación de cantidades numéricas con las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Se han hecho populares hoy en día demostraciones brevísimas y muy sencillas del Teorema de Pitágoras. Pero aún así ¿cómo pueden las operaciones numéricas de multiplicación y suma ser tan una manifestación de la geometría métrica de un triángulo rectángulo? Los conceptos están definidos, a priori, de forma independiente. ¿Por qué sucede entonces que esa aparente independencia no sea tal, sino que sean conceptos vinculados a través del Teorema de Pitágoras? Entender las causas profundas de relaciones matemáticas conlleva una comprensión diferente de la mera explicación lógica, deductiva y formal de cada paso de una demostración, e inspira la creación de definiciones matemáticas abstractas que reflejan esa comprensión profunda. En (Livio, [11, pp. 80-83]) se sugiere que esa comprensión trasciende la forma lógico-deductiva de relaciones no obvias, y en ella radica la respuesta "es ambos", a la vieja pregunta de si la matemática es invento o descubrimiento.

El criterio de no-trivialidad por no-obviedad o profundidad del enunciado de un teorema, a pesar de la eventual simplicidad de su demostración formal, está estrechamente ligado a los criterios racionales informales de relevancia de un enunciado matemático por su belleza estética y por su simplicidad. La mayoría de los investigadores en la matemática pura reconocen su motivación en la búsqueda de la no-trivialidad informal, es decir la profundidad del significado de los enunciados que crean o descubren. Además encuentran belleza y relevancia en el contraste entre la no-obviedad y la simplicidad de la relación hallada, cuando la demostración que encuentran, desde el punto de vista lógico-formal, se puede reducir a una cantidad breve de pasos deductivos relativamente elementales. Por ejemplo Hardy [9] sugiere que una de las condiciones necesarias para la percepción de belleza en la matemática es la economía de recursos formales.

Sin embargo, en la práctica de la comunicación y publicación de los resultados de la matemática pura, resulta hoy en día muy difícil encontrar ejemplos de enunciados nuevos no-triviales, es decir profundos o no-obvios, pero con demostraciones breves y sencillas. En primer lugar, el propio matemático frecuentemente auto-censura sus resultados como triviales, y solo los difunde en carácter de ejercicios, cuando obtiene demostraciones breves y sencillas, aunque sus enunciados sean nuevos, y muestren propiedades inesperadas y sorprendentes. En segundo lugar, si el investigador matemático aún cree relevante su resultado a pesar de la sencillez de su demostración, y lo somete a publicación, difícilmente el árbitro se convencerá racionalmente de la no-trivialidad. Frecuentemente, en un juicio de no trivialidad se considera primero el aspecto formal de la demostración, sobre todo si el autor no ha agregado una introducción que justifique racionalmente la no-obviedad a priori, y la profundidad de las relaciones halladas en sus enunciados.

Un criterio de no-trivialidad usado para un teorema nuevo en los arbitrajes de las comunicaciones científicas de matemática, termina a veces limitándose a "medir la longitud" de su demostración, verificar que no esté artificialmente alargada, y a "contar las dificultades exitosamente sorteadas" durante la misma. Si estas mediciones están por abajo de ciertas cotas, usualmente el teorema es tildado de "trivial" y por lo tanto "irrelevante" , y no es publicado, aunque su enunciado sea racionalmente sorprendente e inesperado. Esta postura conduce, a veces, a que las relaciones profundas que puedan existir entre conceptos matemáticos de origen independiente, o de subdiciplinas matemáticas diferentes, pueden permanecer difundidas muy parcialmente, solo como curiosidades o ejercicios, por fuera de la bibliografía científica arbitrada y reconocida.

Concluimos que, por un lado el concepto de no-trivialidad o no-obviedad del enunciado de un teorema, y su percepción de profundidad por parte de los matemáticos durante la actividad de investigación, están estrechamente ligados a criterios racionales informales no cuantitativos de relevancia y a propiedades intrínsecas de las relaciones matemáticas contenidas en el enunciado, en forma parcialmente independiente de la economía o abundancia de recursos formales utilizados en la demostración. Pero por otro paradójicamente, para la comunicación, aceptación y publicación de resultados matemáticos nuevos, la brevedad o sencillez de recursos formales necesarios para la demostración son frecuentemente consideradas señales de trivialidad u obviedad del enunciado.

4. Criterios de no-redundancia lógico-formal y de redundancia óptima informal.

La redundancia lógico-formal global de una subdisciplina o rama matemática es la propiedad de que al menos uno de sus enunciados se puede deducir de los demás. En este sentido, todo resultado "nuevo" de una subdisciplina matemática ya existente, es redundante, excepto si para demostrarlo se requirió agregar definiciones o presupuestos nuevos, consistentes pero no deducibles de la teoría existente hasta el momento. Por este motivo la no-redundancia lógico-formal, en su concepción global, no es un criterio aplicable usualmente en la matemática para juzgar la relevancia de sus enunciados.

Los criterios de no-redundancia lógico-formales que efectivamente se tienen en cuenta en un juicio de valor de enunciados matemáticos son dos, que establecen condiciones lógicas diferentes e independientes entre sí. Ambos son parciales en vez de globales.

El primero, que llamaremos no-redundancia mutua lógico-formal, está restringido a las proposiciones condicionantes (los supuestos, que deben ser mutuamente consistentes) cuando forman parte de una única definición, de un mismo conjunto de axiomas, o de la hipótesis de un mismo teorema. Es el siguiente criterio: el subconjunto de supuestos no es mutuamente redundante cuando ninguna de las proposiciones que lo forman puede deducirse de las demás. Es más un criterio de bondad del enunciado respectivo que de su relevancia. Es decir, aunque el enunciado contenga en sus supuestos redundancias mutuas lógico-formales no-obvias (no-triviales), puede aún ser relevante, aunque se le considere mejorable, no óptimo.

El segundo criterio de no-redundancia lógico-formal de un teorema, que llamaremos no-redundancia relativa a la tesis, también está restringida a las proposiciones condicionantes de la hipótesis de un mismo teorema. Pero en vez de considerar la no-redundancia mutua, considera la necesidad de cada proposición supuesta en la hipótesis, para que se cumpla la tesis. Precisamente, el criterio es el siguiente: los supuestos en la hipótesis de un teorema son redundantes desde el punto de vista lógico-formal con respecto a la tesis del mismo teorema, si retirando por lo menos una de las proposiciones supuestas en la hipótesis, de las demás se puede deducir la misma tesis del teorema.

Expongamos un ejemplo de redundancia lógico-formal mutua de los supuestos de un enunciado. En la definición de los difeomorfismos de Anosov se establece como condición que el comportamiento dinámico de los subfibrados invariantes sea uniformemente hiperbólico. Un teorema no-trivial, demostrado por ejemplo en (Bonati et als., pp. 287-293), establece que si los subfibrados son invariantes y uniformemente hiperbólicos, entonces son continuos. Por lo tanto, esa propiedad de continuidad sería redundante si se la agregara a la definición de difeormorfismo de Anosov, o a las hipótesis de un teorema que la presuponga.

Sin embargo, y aunque la continuidad de los subfibrados es una propiedad redundante respecto a las otras condiciones que definen la clase de difeomorfismos de Anosov, frecuentemente ¡se la agrega a la definición o a las hipótesis de los teoremas! Se la incluye racionalmente, aunque sea redundante desde el punto de vista lógico-formal. Por un lado esa redundancia no es obvia y la continuidad de los subfibrados es una propiedad no-trivial. Y por otro lado es una propiedad esencial y necesaria en las demostraciones de muchas caracterísiticas relevantes (dinámicas, topológicas y ergódicas) de los difeomorfismos de Anosov. Concluimos que el criterio de no-redundancia lógico-formal puede no aplicarse en algunos casos porque predomina el criterio de no-trivialidad racional informal. Aún así, en esos casos se acostumbra salvaguardar la forma agregando una nota que advierte de la redundancia lógico-formal mutua de las condiciones supuestas.

Consideremos ahora un ejemplo de no-redundancia lógico-formal de cada supuesto en la hipótesis de un teorema con respecto a su tesis. El siguiente ejemplo no corresponde a la investigación matemática actual, sino a la enseñanza de la matemática universitaria. Pero de todas formas es ilustrativo de los criterios de evaluación de redundancias de los supuestos respecto a la tesis durante los procesos de investigación matemática. El conocido teorema de Picard (ver por ejemplo Sotomayor, [19, p. 13]) establece que existe y es única la solución con dato inicial de la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{dt} = F(x), \tag{1}$$

donde la función F es continua y Lipchitziana. La demostración clásica de este teorema tiene dos partes no triviales: una, la prueba de existencia, y otra, la prueba de unicidad, que aunque no-trivial resulta relativamente sencilla basada en la demostración previa de la existencia. Nos interesa observar que la parte más relevante de la demostración, la de existencia de solución, no requiere en realidad de la hipótesis de Lipschitz de la función F. Más precisamente, el teorema de Peano (ver por ejemplo Sotomayor, [19, p. 16]) establece que existe la solución con dato inicial de la ecuación diferencial (1) cuando la función F del segundo miembro es continua, aunque no sea Lipschitziana. Por lo tanto, si la tesis a demostrar fuera solamente la existencia de solución, la hipótesis de Lipschitz sería redundante respecto a la tesis.

Pero la tesis del teorema de Picard afirma también la unicidad de la solución. Y aunque la demostración de esa unicidad sea formalmente fácil de obtener a partir de la demostración de existencia, la hipótesis de Lipschitz no es redundante. En efecto, es clásico el ejemplo de la ecuación diferencial $dx/dt = F(x)$ donde F es la función raíz cuadrada. Para ella existe solución con dato inicial $x(0) = 0$, pero no es única. Ese ejemplo muestra la no-redundancia de la hipótesis de Lipschitz respecto a la tesis de unicidad del teorema de Picard, y por lo tanto la relevancia de esta condición, independientemente de que solo se la utilice en la parte más sencilla de la demostración.

En la mayoría de los casos, cuando no es obvia, puede resultar difícil verificar la no-redundancia lógico-formal de los supuestos de un teorema, tanto la mutua en las proposiciones de la hipótesis, como la de cada una de esas proposiciones relativa a la tesis. Es frecuente la aparición de nuevos teoremas no-triviales en la matemática actual, que establecen que un cierto supuesto de la hipótesis de un teorema previo era redundante en relación a la tesis.

En general, un juicio de valor racional de un teorema nuevo verifica, además de la consistencia y la no-trivialidad, la siguiente pre-condición para la no-redundancia lógico-formal. Ella no asegura esta última, pero es necesaria para esta. La pre-condición consiste en que ninguna de las proposiciones supuestas en la hipótesis de un nuevo teorema sea omitida, u obviamente omitible, a lo largo de todos los pasos deductivos de su demostración. Nos referimos a la demostración dada, no necesariamente a cualquier otra demostración que pueda encontrarse en el futuro para el mismo teorema. Sin embargo, aunque necesaria, esta verificación por sí sola no asegura la no-redundancia (también llamada necesidad) de ese supuesto particular, para obtener la misma tesis del teorema mediante alguna otra demostración aún no conocida, a menos que se dé un contraejemplo. Un tal contraejemplo, que prueba la no-redundancia de cada proposición de la hipótesis respecto a la tesis de un teorema, es un caso particular en que se cumplen todos, excepto uno, los supuestos en la hipótesis, no se cumple ese uno, y no se cumple la tesis del teorema. Nos referimos solamente a la necesidad de cada supuesto hipotético por separado, asumiendo verdaderos los demás y la tesis del teorema. Por lo tanto, un criterio de relevancia lógico-formal de un teorema nuevo considera positivamente, pero no obligatoriamente, los contraejemplos que puedan suministrarse además del enunciado del teorema, que prueben que ninguno de los supuestos en la hipótesis es redundante respecto a la tesis.

Otra cuestión relacionada con la no-redundancia de los supuestos relativa la tesis de un teorema, en general más difícil de evaluar que la que definimos arriba, es la necesidad de todos los supuestos de la hipótesis a la vez, para que valga la tesis. Más precisamente, la no-redundancia de las hipótesis de un teorema respecto a la tesis es total, cuando las proposiciones de la tesis implican por deducción la verdad de todas las proposiciones de la hipótesis a la vez. Esta cuestión ya no se denomina en matemática propiedad de no-redundancia de la hipótesis, sino una propiedad mucho más fuerte, llamada caracterización de la tesis. Es, desde el punto de vista lógico-formal, equivalente a la verdad del teorema recíproco.

Frecuentemente, exceptuando los contraejemplos triviales, es muy difícil que un teorema nuevo sea enunciado por primera vez acompañado de contraejemplos que prueban la necesidad (es decir la no-redundancia respecto a la tesis) de cada uno de los supuestos en su hipótesis. Una de las fuentes de conjeturas que son planteadas por los matemáticos investigadores, e incorporadas a sus agendas de investigación, es precisamente la pregunta de si alguna de las afirmaciones asumidas en la hipótesis de un teorema ya conocido, es necesaria, es decir no-redundante con respecto a la tesis del teorema (y a las demás proposiciones de su hipótesis).

Por ejemplo, Pesin en 1977, [14] formuló por primera vez que para todos los difeomorfismos de Anosov de clase C^2, las medidas llamadas físicas (i.e. medidas de probabilidad que describen la estadística de órbitas típicas según Lebesgue), verifican una igualdad para la entropía, que luego fue llamada fórmula de Pesin de la entropía. (Mañé, [12, p. 95, fórmula 2]). Ésta es una igualdad matemática entre la entropía métrica y el promedio espacial del logaritmo de la tasa de dilatación. La demostración de la fórmula de Pesin usa en forma esencial el supuesto hipotético de que el difeomorfismo es de clase C^2. Es indudablemente una hipótesis no-redundante para que esa demostración del teorema funcione. Sin embargo, recientemente se descubrió que es redundante desde el punto de vista lógico-formal, con respecto a la tesis. Más precisamente, no es necesario que el difeomorfismo de Anosov sea de clase C^2 para que toda medida física satisfaga la fórmula de Pesin de la entropía (ver por ejemplo Cerminara et als. [3, pp. 737-761]).

¿Pierde con este nuevo resultado su relevancia, respecto a la fórmula de Pesin, la vieja hipótesis de regularidad C^2? En nuestra opinión, a favor de la cual argumentaremos a continuación, y según los argumentos racionales informales de buena parte de los matemáticos que investigan en la teoría ergódica diferenciable, la respuesta es "No, no la pierde en absoluto" . En efecto, la hipótesis de regularidad C^2, si bien no es necesaria para deducir que las medidas físicas satisfacen la fórmula de Pesin, es necesaria para que el procedimiento anterior de demostración de esta fórmula, vía la propiedad de continuidad absoluta de las foliaciones invariantes, sea válida. Por un lado, esta propiedad de continuidad absoluta es considerada relevante en sí misma por la comunidad matemática especializada en teoría ergódica diferenciable, según prácticamente todos los criterios racionales informales que discutimos y analizamos a lo largo de este trabajo. Por otro lado, la demostración anterior de la fórmula de Pesin muestra, como paso intermedio, no solo que las medidas físicas la satisfacen, sino que estas medidas son absolutamente continuas respecto a la foliación inestable. Y este resultado, que no sería cierto sin la hipótesis de regularidad C^2 (como muestra el contraejemplo de Robinson y Young 1980, [16]), tiene relevancia en sí mismo: se considera no solo una herramienta de demostración, sino una propiedad no-trivial relevante del sistema dinámico.

El ejemplo anterior muestra otra vez que los criterios lógico-formales de no-redundancia pueden ser, en la práctica de la investigación matemática actual, inocuos respecto a un juicio de relevancia de enunciados, cediendo su lugar a criterios racionales informales de relevancia. Es una de las razones por las que nos afiliamos a la integración de los criterios lógico-formales con los otros criterios racionales, pero informales, en los juicios de valor del quehacer de la investigación matemática.

En la siguiente discusión distinguiremos dos sitios donde la redundancia racional informal, en vez de la no-redundancia lógico-formal, puede incidir positivamente en un juicio de relevancia de los resultados: la del proceso creativo o de descubrimiento de los enunciados matemáticos, y la del proceso de comunicación de éstos.

Es frecuente que los matemáticos se ocupen de la comprensión profunda de los resultados matemáticos y procuren comunicar el aspecto significativo de los contenidos, además de exponer la lógica formal deductiva de las demostraciones. Como muchas actividades humanas no exactas, la comunicación de la matemática (y aunque la matemática sea una ciencia exacta, su comunicación no lo es), requiere redundancia en la transmisión de información, para que los errores de expresión e interpretación puedan ser corregidos, o por lo menos detectados, y minimizar sus efectos negativos en la eficiencia de la comunicación. Aunque usando símbolos y notación muy específicos, el lenguaje matemático es un lenguaje humano. Definamos la entropía del error como la tasa de expansión de la cantidad de información que es diferente entre la información transmitida y la recibida (estas diferencias son los "errores" en la transmisión). "A pesar que raramente es mostrado en modelos diagramáticos del proceso de comunicación, la redundancia - la repetición de elementos dentro de un mensaje que previene el error en la comunicación de información - es el mayor antídoto a la entropía" (Gordon, [7, sección "Entropy" , párrafo 2]). La mayor parte de los lenguajes escritos y hablados, por ejemplo, son aproximadamente 50

La redundancia natural en todo lenguaje humano (y quizás el lenguaje matemático sea de los que tienen menor redundancia entre todos los lenguajes humanos) es el mismo fenómeno físico de la redundancia artificial de los medios de transmisión de la ingeniería moderna, que se diseña para aumentar la seguridad de las comunicaciones digitales. Y también es el mismo fenómeno físico de la redundancia exhibida en numerosos procesos naturales. Por ejemplo, en el análisis matemático estadístico de series temporales de datos, para estudiar fenómenos naturales como el estado del tiempo entre otras aplicaciones, se llama redundancia a la diferencia de la suma de las entropías (definida la entropía, en este caso, como el crecimiento de la cantidad de información significativa, y no como crecimiento de los errores de la información) de todas las variables por separado, menos la entropía conjunta de esas variables. Dicho de otra forma, la cantidad de información de la serie de datos no es la suma de la información de cada dato por separado, sino que es esta suma menos la redundancia. Esta redundancia es mayor cuando más mutuamente dependiente son los datos estudiados. Por lo tanto, a igual cantidad de información de los datos por separado, cuanto mayor es la redundancia, más reducida es la cantidad de información significativa que se obtiene de ellos. Pero es justamente esta redundancia entre los datos, lo que permite hacer predicciones matemáticas: cuanto mayor redundancia, más previsible será la evolución futura de un fenómeno natural estudiado o artificial diseñado.

Por razones de confiabilidad, se introduce naturalmente o artificialmente cierta cantidad de redundancia, la cual implica un sobre-dimensionamiento de los canales de transmisión o soporte de conservación de esa información. Es decir, cuanto mayor es la redundancia, y por lo tanto mayor es la seguridad y fidelidad en la comunicación y en la información transmitida, menor es el aprovechamiento de los recursos necesarios para transmitirla. En efecto, por ejemplo en la teoría de las telecomunicaciones:

Mediante el proceso de conversión analógico-digital, cualquier medio disponible de telecomunicaciones tiene una capacidad limitada para la transmisión de datos. Esta capacidad es comúnmente medida por un parámetro llamado 'ancho de banda' . Como el ancho de banda de una señal aumenta con el número de bits a ser transmitidos, una función importante en el sistema digital de comunicaciones es representar la señal digitalizada con la menor cantidad posible de bits. (Lehnert, [10, sección "Source encoding" , párrafo 1]).

Pero para obtener eficiencia usando la menor cantidad posible de "bits" habría que reducir a cero la redundancia en la cantidad de información de la señal, y por lo tanto la seguridad y confiabilidad de la transmisión de esta información. Esto muestra que en comunicación de información, existe un compromiso entre la seguridad-confiabilidad en la transmisión de esa información, y la eficiencia en el uso del medio de transmisión utilizado. Al aumentar la redundancia se aumenta la primera pero se disminuye la segunda. Por lo tanto la situación óptima, según sea el objetivo del que comunica, se encuentra en un valor intermedio de redundancia, que no es nulo pero tampoco 100 %.

En la comunicación de resultados matemáticos, aparece este mismo compromiso: así por ejemplo artículos matemáticos que contienen resultados muy relevantes y son publicados en las revistas científicas más importantes, frecuentemente son más largos que el promedio de los artículos matemáticos publicados en otras revistas científicas. Esto sucede no solo porque la cantidad de enunciados de cada artículo excepcionalmente relevante sea relativamente grande, y sus demostraciones largas y complicadas, sino porque también contienen - usualmente en la introducción y en notas remarcadas a lo largo del artículo - explicaciones sobre el significado profundo de esos enunciados y su relación con otros resultados previamente conocidos. Estas explicaciones, desde el punto de vista lógico-formal son redundantes, pero a veces son imprescindibles en la búsqueda de efectividad y calidad de la comunicación matemática.

Resulta paradójico que, exceptuando casos como los descritos arriba, en buena parte de la bibliografía de investigación científica en matemática de hoy en día, a pesar de que el recurso de transmisión de información utilizado (por ej. publicación en línea, en vez de papel) es abundante y de relativo bajo costo, algunos de los artículos sean escuetos, excesivamente concisos, y con poca redundancia en la comunicación. Esto quizás se deba a que, para enunciados matemáticos no excepcionalmente relevantes, no sea tan necesaria la redundancia, pues cuando más fácil de comprender o menos profundo es un enunciado, menos sujeto está a errores en su transmisión o comunicación. La concisión, evitando la redundancia tanto formal-lógica como informal en la comunicación de resultados de investigación, es también coherente con una postura filosófica minimalista, frecuente entre algunos matemáticos.

Previo a un juicio de no-redundancia de los supuestos de un enunciado, frecuentemente el investigador matemático procesa su comprensión profunda de esos supuestos a través de un argumento por condicionantes contrafactuales. Estos son condicionantes que suponen la negación de proposiciones asumidas previamente. En el ejemplo del teorema de Picard expuesto antes, si un estudiante tuviera que investigar la no-redundancia de la hipótesis de Lipschitz, el condicionante contrafactual que asumiría es “Si F no fuera Lipschitz ...” . En ese caso la conclusión de no redundancia de la hipótesis de Lipschitz establecería: “entonces la solución con dato inicial podría no ser única” . Sin embargo esa conclusión no se obtiene por deducción lógico-formal (en este ejemplo). Bajo el condicionante contrafactual, es falso que la solución con dato inicial sea necesariamente no única, como podría esperar el estudiante .Es decir, no es en este caso solo un proceso deductivo el que lleva el condicionante contrafactual a la conclusión de no-redundancia de la hipótesis que niega.

Concluimos que la discusión de los supuestos contrafactuales racionales, puede trascender la argumentación lógico-formal, y corresponde a una concepción filosófica de racionalidad informal. En el ejemplo que estamos discutiendo, la prueba de no-redundancia de la hipótesis de Lipschitz en el teorema de Picard, requiere exhibir un contraejemplo para el cual se verifique ese condicionante, pero para el cual la solución no sea única. Justamente, imaginar o descubrir ese contraejemplo, no es un resultado que se obtiene aplicando leyes lógico-formales únicamente. No se construye el contrajemplo meramente por deducción, sino que requiere de la creación e imaginación del investigador. “La habilidad humana de pensar racionalmente sobre situaciones hipotéticas y relaciones condicionantes se apoya en la capacidad de imaginar posibilidades” (J. Laird, citado en Byrne [2, p. 441])

¿Pero es la creación e imaginación en matemática un proceso racional? Efectivamente lo es, afiliándonos a la definición de imaginación racional de Byrne, 2007, [2]. “En el pasado, racionalidad e imaginación eran vistas como opuestos. Pero la investigación ha mostrado que el pensamiento racional es más imaginativo de lo que se suponía” (Byrne, [2, p. 439]. En particular, la imaginación racional por condicionantes contrafactuales en matemática, permite crear alternativas en la búsqueda de nuevo conocimiento en la subdisciplina que se investiga. Aunque el proceso de imaginación es informal, en la creación de conocimiento matemático es racional. En efecto, “los mismos principios del pensamiento racional, conducen también al pensamiento imaginativo... y el puente entre la racionalidad y la imaginación puede ser construido sobre condicionales contrafactuales” (Byrne [2, p. 441]. Sin embargo, aunque racional, la redundancia entre conjuntos de enunciados requerida durante los procesos de creación e imaginación en los que la investigación matemática se apoya, no sigue un algoritmo lógico-formal descriptible paso a paso. Por lo tanto, esa redundancia, y la manera en la que la imaginación matemática se basa en ella, son conceptos racionales informales.

Concluimos que la actividad de creación e imaginación racional del investigador matemático le permite formular conjeturas, ejemplos, contraejemplos, y tentativas de enunciados sobre los que construye y actúa su investigación. En ese proceso, la redundancias lógico-formales e informales constituyen un ingrediente esencial. No lo son solamente por las propiedades psicológicas de la creación e imaginación humanas, sino también por las características intrínsecas del proceso de investigación racional de la matemática, y por las características profundas de la matemática misma. Más precisamente, del proceso de creación e imaginación racional en matemática, se aspira encontrar relaciones no triviales entre enunciados previos y/o nuevos. Es justamente la búsqueda de redundancias en esa información, que es anterior a los juicios de verdad en matemática, el camino que conduce la investigación. Pero si el conjunto de enunciados sobre los que se investiga no fueran redundantes, esas relaciones buscadas no existirían, debido a la definición misma de independencia o no-redundancia de la cantidad de información de cada uno. Si bien el investigador matemático usualmente no toma conciencia ni obtiene una medición precisa de la redundancia requerida entre los enunciados que considera en sus procesos de creación e imaginación racional, es en base a ella que puede construir el conocimiento matemático nuevo.

5. Conclusión

Expusimos y discutimos varias definiciones, ilustradas con ejemplos, de los conceptos de consistencia, no-trivialidad y redundancia en la investigación de la matemática actual, tanto desde el punto de vista lógico-formal como del racional informal. Discutimos esos conceptos, argumentando a favor de una postura, en cuanto a los criterios que inciden en los juicios de relevancia matemática, acorde con una filosofía de racionalidad formal e informal integrada.

Aunque quizás no tanto como en áreas científicas basadas en la experimentación y en las evidencias empíricas, en la matemática también está presente la racionalidad informal complementando a los criterios de racionalidad lógico-formales, para integrar los juicios de relevancia de sus enunciados.

Referencias

[1] Anosov D.V. "Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature" en Proceedings Steklov Institute 90 (1967) pp. 1-235

[2] Byrne, R. "Précis of The Rational Imagination: How People Create Alternatives to Reality" en Behavioral and Brain Sciences 30 (2007) pp.439-480 doi:10.1017/S0140525X07002579

[3] Cerminara M., Catsigeras E., Enrich H. "The Pesin entropy formula for C^1 diffeomorphisms with dominated splitting" en Ergodic Theory and Dynamical Systems 35 (2015) pp. 737-761 doi: 10.1017/etds.2013.93

[4] Cook, J.W. "Did Wittgenstein Practise What He Preached?" en Philosophy 81 (2006) pp.445-462, doi: 10.1017/S0031819106317032.

[5] Enrich H., Catsigeras E. "SRB-like measures for C0 dynamics" en Bulletin of the Polish Academy of Sciences - Mathematics 59 (2011) N2, pp. 151-164 doi: 10.4064/ba59-2-5

[6] Feynman, R. P. "A Different Set of Tools." en Surely You're joking, Mr. Feynman. Adventures of a Curious Character, pp. 69-72, New York: W.W. Norton, 1997

[7] Gordon, G.N. "Communication" en Encyclopaedia Britannica. Recurso electrónico http://www.britannica.com/topic/communication Última descarga 24 Febrero 2016

[8] Gray, J. “Depth- A Gaussian Tradition in Mathematics” en Philosophia Mathematica 23 (2015) N 2, pp. 177-195, doi: 10.1093/philmat/nku035

[9] Hardy, G.H. “A Mathematicians’s Apology”, reprint of the first edition of 1940 with forword by C. P. Snow, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1967.

[10] Lehnert, J. “Telecommunication” en Encyclopaedia Brittannica, article 608165, recurso electrónico http://www.britannica.com/technology/telecommunication#ref608165 . Última descarga 27 Febrero 2016

[11] Livio, M. “Why math works?” en Scientific American 305 (2011) N 2, pp. 80-83.

[12] Mañé, R. “A proof of Pesins formula” en Ergodic Theory and Dynamical Systems 1 (1981), pp. 95-102.

[13] Mirollo R.E., Strogatz, S.H. “Synchronization of pulse-coupled biological oscillators” en Society of Industrial and Applied Mathematics Journal 50 (1990), pp.1645-1662

[14] Pesin, Ya. “Characteristic Lyapunnov exponents and smooth ergodic theory” en Russian Mathematics Surveys 32 (1977) N 4, pp. 55-114

[15] Putnam, H. Reason, Truth and History, Cambridge University Press, 1981, traducción al castellano Razón, Verdad e Historia, Madrid: Editorial Tecnos, 2006

[16] Robinson, C., Young, L.S. “Nonabsolutely continuous foliations for an Anosov diffeomorphism” en Inventiones mathematicae 61 (1980) N 2, pp. 159-176

[17] Shanks, D. “Is the Quadratic Reciprocity Law a Deep Theorem?” en Solved and Unsolved Problems in Number Theory, Fourth. Edition, New York: Chelsea Publ., 1993 pp. 64-66

[18] Sinai, Ya. G. “Gibbs measures in ergodic theory” en Russian Mathematics Surveys 27 (1972) N 4, pp. 2169.

[19] Sotomayor , J. Lições de equações diferenciais ordinárias, Río de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Projeto Euclides, 1979

[20] Tao, T “What is good mathematics?” en Bulletin of the American Mathematical Society 44 (2007) N 4, pp. 623-634.

[21] Tarski, A Introduction to Logic and Methodology of Deductive Sciences, Second Edition, New York: Dover Publ. Inc., 1946

[22] Weisstein, E “Trivial” en Wolfram Math World, Foundations of Mathematics. Recurso electrónico http://mathworld.wolfram.com/Trivial.html Última descarga 24 Febrero 2016.

[23] Wittgenstein, L. Philosphische Untersuchungen. (1953, postmorten) Traducción al inglés en Philosophical Investigations, 3rd edition, New York: Macmillan, 1958.