

# **DETERMINACION DE ESTRUCTURAS TRIDIMENSIONALES INACCESIBLES MEDIANTE LA APLICACIÓN DE METODOS TOPOGRAFICOS DE PRECISION**

**ING. AGRIM. DANILO BLANCO**

*dblanco@fing.edu.uy*

**PROF. ING. AGRIM. JORGE FAURE VALBI**

*jfaure@fing.edu.uy*

**ING. AGRIM. MAGALI MARTINEZ**

*magalim@fing.edu.uy*

*Facultad de Ingeniería – Instituto de Agrimensura – Departamento de Geodesia*

*Julio Herrera y Reissig 565. CP 11300. Montevideo*

*Teléfono: (598 2) 711 03 95 Fax: (598 2) 711 54 46*

## **1\_ INTRODUCCIÓN**

El 23 de Agosto de 2005 un temporal azotó la ciudad de Montevideo, provocando daños importantes en la estructura de la antena de Dedicado S.A. ubicada en el Cerrito de la Victoria. Se produjo el derrumbe del tramo superior ocasionando importantes deformaciones en el resto de la estructura que permaneció en pie.

Fue encomendado al Instituto de Estructuras de la Facultad de Ingeniería, el estudio de la magnitud de los daños provocados sobre la estructura para así poder evaluar la viabilidad de su reparación. Esto motivó la necesidad de contar con un modelo tridimensional de la torre, tarea que fue encomendada al Departamento de Geodesia del Instituto de Agrimensura.

La imposibilidad de acceder físicamente a la antena dejó de manifiesto la necesidad de instrumentar un método que permitiera generar el modelo tridimensional, sin mediar contacto alguno con la estructura y que asegurara un entorno de error menor a la cuantía de deformación admisible para cada punto. En principio se consideró utilizar una Estación Total con medición láser sin reflector, lo cual se descartó debido a la restricción que presenta en la distancia máxima a medir. Se ideó entonces una metodología basada en los principios de la intersección directa utilizando como bases los lados de una poligonal cerrada, lo que permitió utilizar una Estación Total convencional.

Se realizó asimismo un estudio previo de las precisiones con las cuales sería factible obtener las coordenadas de los puntos relevados aplicando ambos métodos, permitiéndonos asegurar resultados con precisiones centimétricas en todos los casos.

## 2\_ UBICACION

La estructura metálica, que formó parte de la antena de Dedicado S.A., está ubicada en el barrio "Cerrito de La Victoria", en la intersección de las calles García de Zúñiga y Juan Acosta.



**Figura 1.** Croquis de Ubicación



**Figura 2.** Imagen de la zona



**Figura 3.** Imagen de la antena

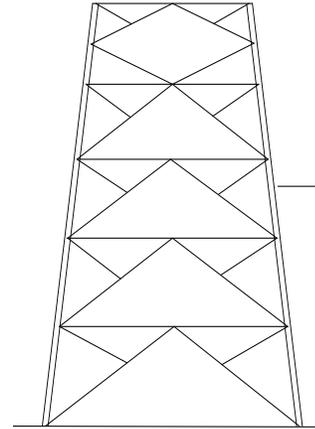
### 3\_ DESCRIPCIÓN DE LA ESTRUCTURA

La estructura original de la torre es de forma triangular, definida por 3 patas verticales ubicadas en los vértices del triángulo.

La **Figura 4** muestra la ubicación de la torre en la manzana, mientras que la **Figura 5** representa un corte esquemático de la estructura que quedó en pie.

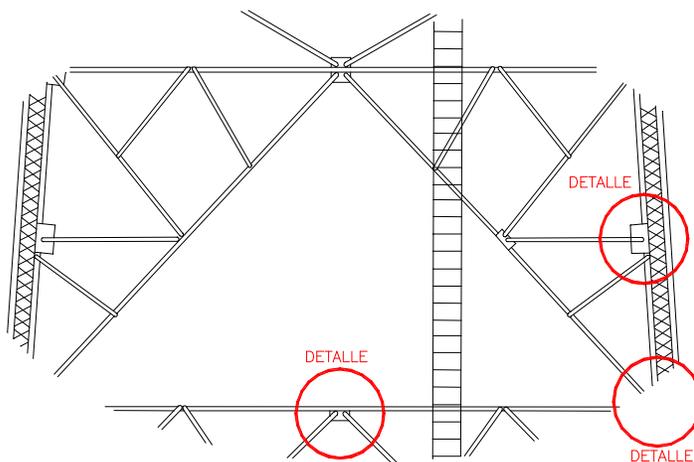


**Figura 4**



**Figura 5.** Esquema pata vertical

Cada una de las caras de la torre está compuesta por cinco tramos horizontales y cada tramo esta compuesto a su vez por un conjunto de barras de diagonales, tal como muestra la **Figura 5**. La unión entre todas las barras horizontales o diagonales se materializa mediante un trozo de chapa soldada con bulones de acero.



**Figura 6**

En la **Figura 6** se aprecia en detalle un tramo horizontal de una de las caras de la estructura. Las diferentes uniones de las barras diagonales entre sí, así como las uniones entre los diferentes tramos horizontales se ven en las **Figuras 7, 8 y 9**.

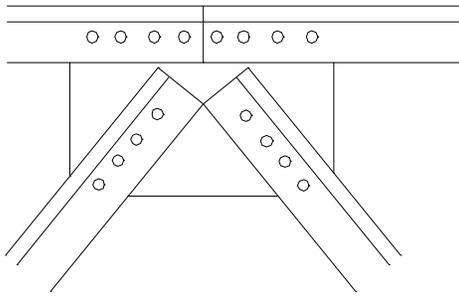


Figura 7

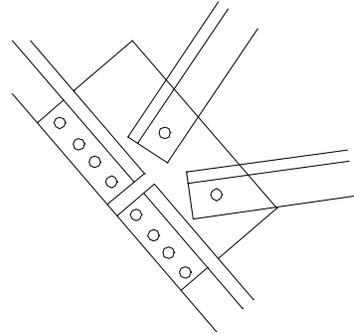


Figura 8

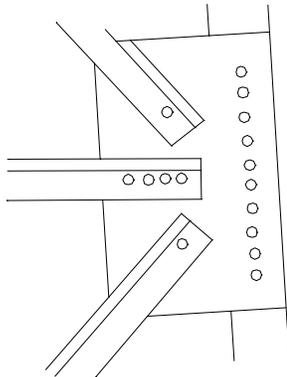


Figura 9

En cuanto al criterio de relevamiento para la definición del modelo espacial, visto la complejidad en los ensamblados de las distintas componentes que intervienen en cada tramo y considerando las prioridades indicadas por el Instituto de Estructuras, se optó por relevar las barras principales. Asimismo a los efectos de modelar dichas barras, se determinaron las posiciones espaciales de los bulones especificados en los gráficos de las **Figuras 7, 8 y 9**.

#### 4\_ ELECCIÓN DE INSTRUMENTAL

En principio pareció adecuada la utilización de una Estación Total con medición láser sin prisma reflector, lo cual fue posible llevar a cabo solo parcialmente, debido a la restricción que presenta en la distancia máxima a medir. Esta limitante quedó en evidencia al intentar relevar los puntos más elevados, que eran los que se encontraban a mayor distancia del instrumento.

#### 5\_ESTUDIO DE LAS POSIBLES METODOLOGÍAS DE RELEVAMIENTO PARA LA DEFINICIÓN DEL MODELO ESPACIAL

En primera instancia se definió y ajustó una poligonal de apoyo de seis lados, desde cuyos vértices se pretendía relevar aquellos puntos que definieran la estructura.

Teniendo en cuenta que la antena está emplazada en una zona urbana, rodeada de construcciones, luego de una inspección del lugar se consideraron a priori dos métodos posibles de relevamiento para llevar adelante el trabajo:

- A\_ Método de Polares
- B\_ Método de Intersección Directa

Se realizó un estudio analítico de ambos métodos y la influencia de los errores en la determinación de las coordenadas finales de los puntos relevados aplicando cada uno de ellos.

## A\_ Método de Polares

Planimetría

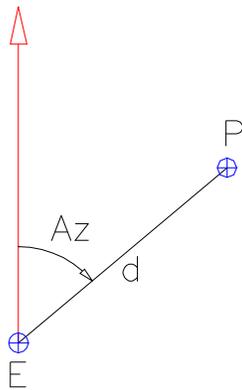


Figura 10

Altimetría

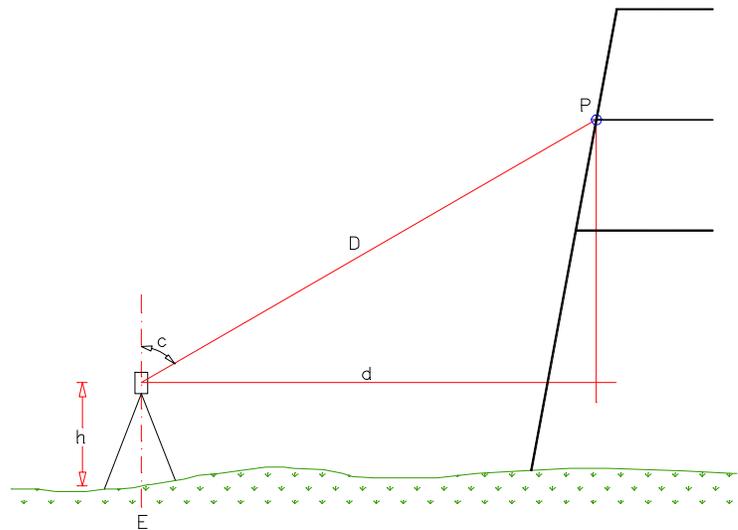


Figura 11

### Definición de coordenadas

En planimetría:

$$X_P = X_E + d \operatorname{sen}(Az_{EP})$$

$$Y_P = Y_E + d \operatorname{cos}(Az_{EP})$$

$$d = D \operatorname{sen}(c)$$

$$X_P = X_E + D \operatorname{sen}(c) \operatorname{sen}(Az_{EP})$$

$$Y_P = Y_E + D \operatorname{sen}(c) \operatorname{cos}(Az_{EP})$$

En altimetría:

$$Z_P = Z_E + h + D \operatorname{cos}(c)$$

### Propagación de Errores

Las variables a determinar serán las coordenadas del punto P, las cuales dependen de las coordenadas de la estación E y de las observaciones realizadas. Las primeras están dispuestas en el vector Y, mientras que las segundas lo están en el vector X.

$$Y = \begin{bmatrix} X_P \\ y_P \\ Z_P \end{bmatrix} \quad X^T = [X_E \quad Y_E \quad Z_E \quad D \quad Az_{EP} \quad c \quad h]$$

Las matrices covarianzas asociadas a dichos vectores son:

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_P}^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{Y_P}^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{Z_P}^2 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_E}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{Y_E}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Z_E}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_D^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{Az}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_h^2 \end{bmatrix}$$

Cabe aclarar, que si bien las coordenadas de cada estación no son independientes entre si, para simplificar los cálculos y sin temor de que esto afecte en forma sustancial los resultados de este preanálisis, se las considerará independientes.

Aplicando la ley general de propagación de covarianzas:

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \Sigma_{XX} J_{YX}^T \quad J_{YX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial X_E} & \frac{\partial X}{\partial Y_E} & \frac{\partial X}{\partial Z_E} & \frac{\partial X}{\partial D} & \frac{\partial X}{\partial Az} & \frac{\partial X}{\partial c} & \frac{\partial X}{\partial h} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_E} & \frac{\partial Y}{\partial Y_E} & \frac{\partial Y}{\partial Z_E} & \frac{\partial Y}{\partial D} & \frac{\partial Y}{\partial Az} & \frac{\partial Y}{\partial c} & \frac{\partial Y}{\partial h} \\ \frac{\partial Z}{\partial X_E} & \frac{\partial Z}{\partial Y_E} & \frac{\partial Z}{\partial Z_E} & \frac{\partial Z}{\partial D} & \frac{\partial Z}{\partial Az} & \frac{\partial Z}{\partial c} & \frac{\partial Z}{\partial h} \end{bmatrix}$$

Siendo las derivadas parciales:

$$\frac{\partial X}{\partial X_E} = 1 \quad \frac{\partial X}{\partial Y_E} = \frac{\partial X}{\partial Z_E} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial D} = \text{sen}(c)\text{sen}(Az_{EP}) \quad \frac{\partial X}{\partial Az} = D\text{sen}(c)\cos(Az_{EP})$$

$$\frac{\partial X}{\partial c} = D\cos(c)\text{sen}(Az_{EP}) \quad \frac{\partial X}{\partial h} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial X_E} = \frac{\partial Y}{\partial Z_E} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial Y_E} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial D} = \text{sen}(c)\cos(Az_{EP}) \quad \frac{\partial Y}{\partial Az} = -D\text{sen}(c)\text{sen}(Az_{EP}) \quad \frac{\partial Y}{\partial c} = D\cos(c)\cos(Az_{EP})$$

$$\frac{\partial Y}{\partial h} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_E} = \frac{\partial Z}{\partial Y_E} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial Z_E} = 1 \quad \frac{\partial Z}{\partial D} = \cos(c) \quad \frac{\partial Z}{\partial Az} = 0 \quad \frac{\partial Z}{\partial c} = -D\text{sen}(c) \quad \frac{\partial Z}{\partial h} = 0$$

### Cálculos

Para evaluar los posibles errores en las coordenadas finales de los puntos a relevar por este método, se estimaron las magnitudes que intervienen en los cálculos de la siguiente manera:

Se midieron en forma aproximada en el lugar:

$$D = 60 \text{ m} \\ Az_{EP} = 345^\circ \\ c = 40^\circ$$

Se estimaron los errores en las coordenadas de los puntos de la poligonal de apoyo en base a la experiencia y al instrumental disponible.  $\Rightarrow \sigma_{X_E} = \sigma_{Y_E} = \sigma_{Z_E} = 0.02 \text{ m}$

De las especificaciones técnicas del instrumental con el que se disponía para realizar el relevamiento utilizando este método (Estación Total con medición láser sin prisma reflector):

$$\sigma_D = 0.010 \text{ m}$$

$$\sigma_{Az} = \sigma_c = 5''$$

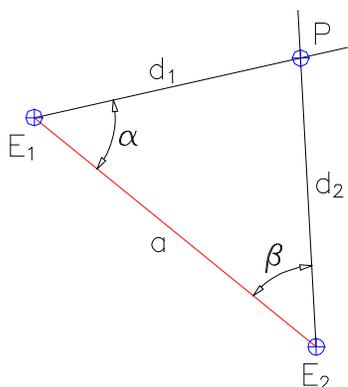
Se considera que en la medición de la altura de aparato no se incurre en error:  $\sigma_h = 0$ .

### Resultados

$\sigma_{xP} = 0.020 \text{ m}$
$\sigma_{yP} = 0.021 \text{ m}$
$\sigma_{zP} = 0.021 \text{ m}$
<b>Módulo = 0.036 m</b>

### **B\_ Método de Intersección Directa**

Planimetría:



Desde E1:

$$\begin{cases} x_P = x_{E1} + d_1 \text{sen}(AZ_{E1P}) \\ y_P = y_{E1} + d_1 \text{cos}(AZ_{E1P}) \end{cases}$$

Desde E2:

$$\begin{cases} x_P = x_{E2} + d_2 \text{sen}(AZ_{E2P}) \\ y_P = y_{E2} + d_2 \text{cos}(AZ_{E2P}) \end{cases}$$

Figura 12

### Definición de coordenadas:

Teorema del seno:

$$\frac{a}{\text{sen}[180 - (\alpha + \beta)]} = \frac{d_1}{\text{sen}(\beta)} = \frac{d_2}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{a}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$d_1 = a \frac{\text{sen}(\beta)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$d_2 = a \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$a = \sqrt{(X_{E2} - X_{E1})^2 + (Y_{E2} - Y_{E1})^2}$$

En función de esto, las coordenadas planas serán:

$$x_P = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} + \frac{d_1 \operatorname{sen}(AZ_{E_1P})}{2} + \frac{d_2 \operatorname{sen}(AZ_{E_2P})}{2}$$

$$x_P = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} + \frac{a \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(AZ_{E_1P})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} + \frac{a \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(AZ_{E_2P})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

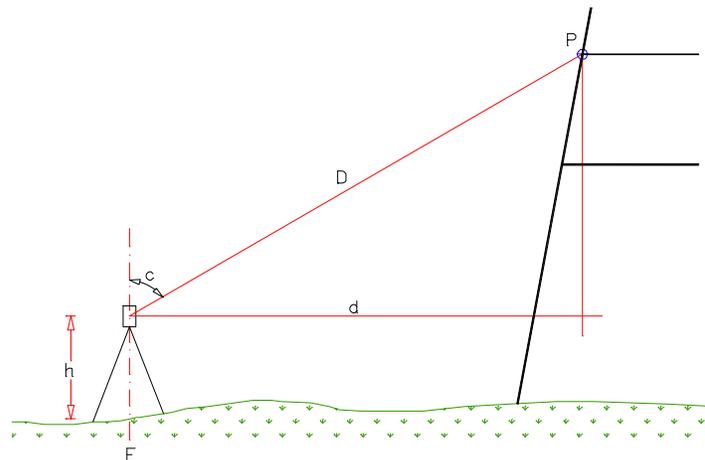
$$x_P = \frac{x_{E_1} + x_{E_2}}{2} + \frac{\sqrt{(x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2}}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} [\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(AZ_{E_1P}) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(AZ_{E_2P})]$$

$$y_P = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} + \frac{d_1 \cos(AZ_{E_1P})}{2} + \frac{d_2 \cos(AZ_{E_2P})}{2}$$

$$y_P = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} + \frac{a \operatorname{sen}(\beta) \cos(AZ_{E_1P})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} + \frac{a \operatorname{sen}(\alpha) \cos(AZ_{E_2P})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$y_P = \frac{y_{E_1} + y_{E_2}}{2} + \frac{\sqrt{(x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2}}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} [\operatorname{sen}(\beta) \cos(AZ_{E_1P}) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(AZ_{E_2P})]$$

Altimetría:



Desde E1:

$$z_P = z_{E_1} + h_{E_1} + \frac{d_1}{\operatorname{tg}(c_1)}$$

Desde E2:

$$z_P = z_{E_2} + h_{E_2} + \frac{d_2}{\operatorname{tg}(c_2)}$$

Figura 13

$$z_P = \frac{z_{E_1} + z_{E_2}}{2} + \frac{h_{E_1} + h_{E_2}}{2} + \frac{d_1 / \operatorname{tg}(c_1) + d_2 / \operatorname{tg}(c_2)}{2}$$

$$z_P = \frac{z_{E_1} + z_{E_2}}{2} + \frac{h_{E_1} + h_{E_2}}{2} + \frac{1}{2} \left[ a \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{tg}(c_1) \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} + a \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{tg}(c_2) \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \right]$$

$$z_P = \frac{z_{E_1} + z_{E_2}}{2} + \frac{h_{E_1} + h_{E_2}}{2} + \frac{\sqrt{(x_{E_2} - x_{E_1})^2 + (y_{E_2} - y_{E_1})^2}}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \left[ \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{tg}(c_1)} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{tg}(c_2)} \right]$$

## Propagación de Errores

Las variables a determinar serán nuevamente las coordenadas del punto P, las cuales dependen de las coordenadas de las estaciones E<sub>1</sub> y E<sub>2</sub> y de las observaciones realizadas. Las primeras están dispuestas en el vector Y, mientras que las segundas lo están en el vector X

$$Y = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix}$$

$$X^T = [X_{E_1} \ X_{E_2} \ Y_{E_1} \ Y_{E_2} \ Z_{E_1} \ Z_{E_2} \ \alpha \ \beta \ AZ_{E_1P} \ AZ_{E_2P} \ c_1 \ c_2 \ h_1 \ h_2]$$

Teniendo iguales consideraciones que en el método anterior respecto de las coordenadas de las estaciones y aplicando la ley general de propagación de covarianzas obtenemos:

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_P}^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} \\ \sigma_{XY} & \sigma_{Y_P}^2 & \sigma_{YZ} \\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_{Z_P}^2 \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_{E_1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{X_{E_2}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{Y_{E_1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{Y_{E_2}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{Z_{E_1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{Z_{E_2}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\alpha}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\beta}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{AZ_{E_1P}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{AZ_{E_2P}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{c_1}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{c_2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{h_1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{h_2}^2 \end{bmatrix}$$

$$J_{YX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial X_{E_1}} & \frac{\partial X}{\partial X_{E_2}} & \frac{\partial X}{\partial Y_{E_1}} & \frac{\partial X}{\partial Y_{E_2}} & \frac{\partial X}{\partial Z_{E_1}} & \frac{\partial X}{\partial Z_{E_2}} & \frac{\partial X}{\partial \alpha} & \frac{\partial X}{\partial \beta} & \frac{\partial X}{\partial AZ_{E_1P}} & \frac{\partial X}{\partial AZ_{E_2P}} & \frac{\partial X}{\partial c_1} & \frac{\partial X}{\partial c_2} & \frac{\partial X}{\partial h_1} & \frac{\partial X}{\partial h_2} \\ \frac{\partial Y}{\partial X_{E_1}} & \frac{\partial Y}{\partial X_{E_2}} & \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_1}} & \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_2}} & \frac{\partial Y}{\partial Z_{E_1}} & \frac{\partial Y}{\partial Z_{E_2}} & \frac{\partial Y}{\partial \alpha} & \frac{\partial Y}{\partial \beta} & \frac{\partial Y}{\partial AZ_{E_1P}} & \frac{\partial Y}{\partial AZ_{E_2P}} & \frac{\partial Y}{\partial c_1} & \frac{\partial Y}{\partial c_2} & \frac{\partial Y}{\partial h_1} & \frac{\partial Y}{\partial h_2} \\ \frac{\partial Z}{\partial X_{E_1}} & \frac{\partial Z}{\partial X_{E_2}} & \frac{\partial Z}{\partial Y_{E_1}} & \frac{\partial Z}{\partial Y_{E_2}} & \frac{\partial Z}{\partial Z_{E_1}} & \frac{\partial Z}{\partial Z_{E_2}} & \frac{\partial Z}{\partial \alpha} & \frac{\partial Z}{\partial \beta} & \frac{\partial Z}{\partial AZ_{E_1P}} & \frac{\partial Z}{\partial AZ_{E_2P}} & \frac{\partial Z}{\partial c_1} & \frac{\partial Z}{\partial c_2} & \frac{\partial Z}{\partial h_1} & \frac{\partial Z}{\partial h_2} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \Sigma_{XX} J_{YX}^T$$

Siendo las derivadas parciales:

$$\frac{\partial X}{\partial X_{E_1}} = \frac{1}{2} - \frac{(X_{E_2} - X_{E_1})}{2a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} (\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}})) \quad \frac{\partial X}{\partial X_{E_2}} = 1 - \frac{\partial X}{\partial X_{E_1}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial Y_{E_1}} = -\frac{(Y_{E_2} - Y_{E_1})}{2a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} (\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}})) \quad \frac{\partial X}{\partial Y_{E_2}} = -\frac{\partial X}{\partial Y_{E_1}}$$

$$\frac{\partial X}{\partial Z_{E_1}} = \frac{\partial X}{\partial Z_{E_2}} = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{a}{2} \left( \frac{\cos(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}}) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) (\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}}))}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = \frac{a}{2} \left( \frac{\cos(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}}) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) (\operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}}))}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial Az_{E_{1P}}} = \frac{a \operatorname{sen}(\beta) \cos(Az_{E_{1P}})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad \frac{\partial X}{\partial Az_{E_{2P}}} = \frac{a \operatorname{sen}(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_1} = \frac{\partial X}{\partial c_2} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial h_1} = \frac{\partial X}{\partial h_2} = 0$$

$$\frac{\partial Y}{\partial X_{E_1}} = -\frac{(X_{E_2} - X_{E_1})}{2a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} (\operatorname{sen}(\beta) \cos(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}})) \quad \frac{\partial Y}{\partial X_{E_2}} = -\frac{\partial Y}{\partial X_{E_1}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Y_{E_1}} = \frac{1}{2} - \frac{(Y_{E_2} - Y_{E_1})}{2a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} (\operatorname{sen}(\beta) \cos(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}})) \quad \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_2}} = 1 - \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_1}}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Z_{E_1}} = \frac{\partial Y}{\partial Z_{E_2}} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_1}} = \frac{\partial Y}{\partial Y_{E_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{a}{2} \left( \frac{\cos(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}}) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) (\operatorname{sen}(\beta) \cos(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}}))}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = \frac{a}{2} \left( \frac{\cos(\beta) \cos(Az_{E_{1P}}) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) (\operatorname{sen}(\beta) \cos(Az_{E_{1P}}) + \operatorname{sen}(\alpha) \cos(Az_{E_{2P}}))}{\operatorname{sen}^2(\alpha + \beta)} \right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial Az_{E_{1P}}} = \frac{-a \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(Az_{E_{1P}})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \quad \frac{\partial Y}{\partial Az_{E_{2P}}} = \frac{-a \operatorname{sen}(\alpha) \operatorname{sen}(Az_{E_{2P}})}{2 \operatorname{sen}(\alpha + \beta)}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial c_1} = \frac{\partial Y}{\partial c_2} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial h_1} = \frac{\partial Y}{\partial h_2} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial X_{E_1}} = -\frac{(X_{E_2} - X_{E_1})}{2a \operatorname{sen}(\alpha + \beta)} \left( \frac{\operatorname{sen}(\beta)}{\operatorname{tg}(c_1)} + \frac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\operatorname{tg}(c_2)} \right) \quad \frac{\partial Z}{\partial X_{E_2}} = -\frac{\partial Z}{\partial X_{E_1}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Y_{E_1}} = -\frac{(Y_{E_2} - Y_{E_1})}{2a \sin(\alpha + \beta)} \left( \frac{\sin(\beta)}{\operatorname{tg}(c_1)} + \frac{\sin(\alpha)}{\operatorname{tg}(c_2)} \right) \quad \frac{\partial Z}{\partial Y_{E_2}} = -\frac{\partial Z}{\partial Y_{E_1}}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial Z_{E_1}} = \frac{\partial Z}{\partial Z_{E_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{a}{2 \sin^2(\alpha + \beta)} \left( \frac{-\sin(\beta) \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}(c_1)} + \frac{\cos(\alpha) \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) \sin(\alpha)}{\operatorname{tg}(c_2)} \right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{a}{2 \sin^2(\alpha + \beta)} \left( \frac{\cos(\beta) \sin(\alpha + \beta) - \cos(\alpha + \beta) \sin(\beta)}{\operatorname{tg}(c_1)} - \frac{\sin(\alpha) \cos(\alpha + \beta)}{\operatorname{tg}(c_2)} \right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial AZ_{E_1P}} = \frac{\partial Z}{\partial AZ_{E_2P}} = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial c_1} = \frac{-a \sin(\beta)}{2 \sin(\alpha + \beta) \sin^2(c_1)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial c_2} = \frac{-a \sin(\alpha)}{2 \sin(\alpha + \beta) \sin^2(c_2)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial h_1} = \frac{\partial Z}{\partial h_2} = \frac{1}{2}$$

### Testeo del instrumental utilizado

En el lugar, se realizó un testeo de la estación total utilizada (TC600), midiendo el acimut de uno de los puntos a ser relevado, en reiteradas oportunidades. Cabe aclarar que el método utilizado para medir los ángulos fue el de Bessel a los efectos de eliminar los posibles errores sistemáticos del instrumento.

Resultados del testeo:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma_{Az} = 4'' \\ \sigma_c = 8'' \end{cases}$$

### Cálculos

A los efectos de evaluar la propagación de errores antes descripta se tomaron:

$$a = 64 \text{ m.}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$\beta = 41^\circ$$

$$AZ_{E_1P} = 78^\circ$$

$$AZ_{E_2P} = 345^\circ$$

$$c_1 = 40^\circ$$

$$c_2 = 40^\circ$$

$$\sigma_{x_{E_1}} = \sigma_{x_{E_2}} = \sigma_{y_{E_1}} = \sigma_{y_{E_2}} = \sigma_{z_{E_1}} = \sigma_{z_{E_2}} = 0.02 \text{ m.}$$

$$\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 4''$$

$$\sigma_{AZ_{E_1P}} = \sigma_{AZ_{E_2P}} = 4''$$

$$\sigma_{c_1} = \sigma_{c_2} = 8''$$

$$\sigma_{h_1} = \sigma_{h_2} = 0.$$

### Resultados

$$\sigma_{x_P} = 0.016 \text{ m}$$

$$\sigma_{y_P} = 0.016 \text{ m}$$

$$\sigma_{z_P} = 0.027 \text{ m}$$

$$\text{Módulo} = 0.035 \text{ m}$$

Cambiando:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_{\beta} = 10''$$

$$\sigma_{AzE1P} = \sigma_{AzE2P} = 10''$$

$$\sigma_{c1} = \sigma_{c2} = 20''$$

### Resultados

$$\sigma_{xP} = 0.016 \text{ m}$$

$$\sigma_{yP} = 0.016 \text{ m}$$

$$\sigma_{zP} = 0.028 \text{ m}$$

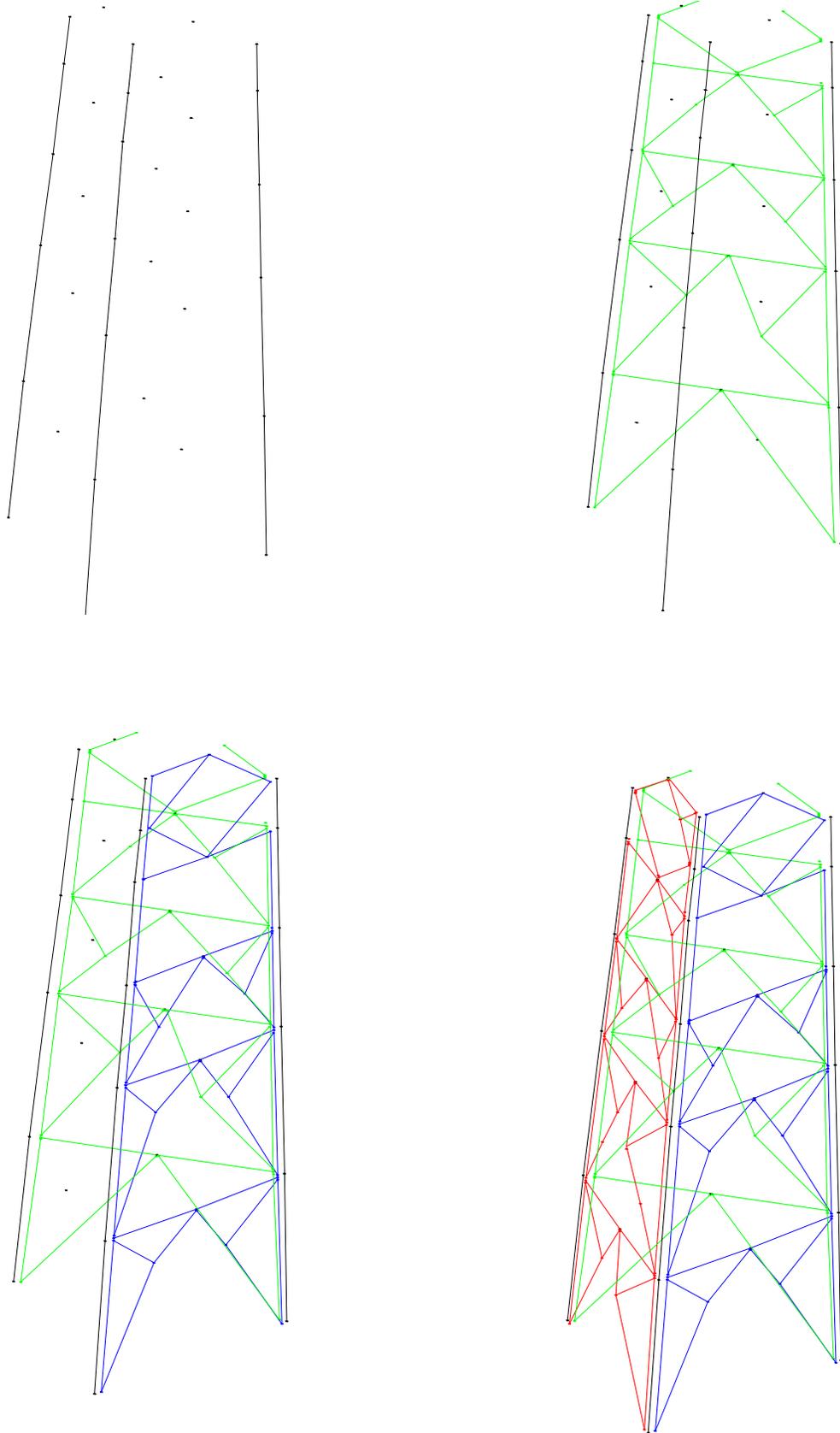
$$\text{Módulo} = 0.036 \text{ m}$$

Del estudio realizado sobre los posibles métodos de relevamiento a aplicar y los errores con los cuales se logran determinar espacialmente los puntos, se desprende que no hay grandes diferencias entre ellos. Por lo tanto se decidió realizar el trabajo planteado a través del método de intersección directa, principalmente motivados por las condicionantes del lugar (obstáculos, distancias de la antena a los vértices de la poligonal, etc).

## **6\_ RESULTADOS OBTENIDOS**

Se lograron determinar mediante sus coordenadas, 52 puntos que definieron el modelo espacial deseado. Se usó el software AutoCAD para la visualización del mismo uniéndolos convenientemente los puntos relevados.

Los recaudos entregados al Instituto de Estructuras fueron: una planilla electrónica con listado de los puntos (número, coordenadas X, Y, Z, descripción de su ubicación en la estructura) y un archivo AutoCAD del modelo resultante con la ubicación de los puntos.



**Figura 14.** Generación del modelo tridimensional en AutoCAD a partir de los puntos relevados.

## 7\_CONTROLES REALIZADOS Y CONCLUSIONES

A los efectos de tener un control y validación de lo realizado se relevaron 22 puntos pertenecientes a una misma cara de la estructura a través de los dos métodos: Polares e Intersección Directa.

Se calcularon de esta manera las diferencias entre las coordenadas de los puntos y se definieron los módulos de los vectores definidos por estos.

El promedio de los módulos de dichos vectores resultó ser **menor a 3 cm.**

Esto reafirmó lo calculado en el preanálisis realizado.

Los resultados obtenidos permiten afirmar que es válido este procedimiento basado en la intersección directa aplicado como método de topografía de precisión para la definición de modelos tridimensionales.