



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA
FACULTAD DE INGENIERÍA



Procesamiento de Señales en Imaginería Ultrasónica e Inversión Temporal

TESIS PRESENTADA A LA FACULTAD DE INGENIERÍA DE LA
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA POR

Pablo Iturralde

EN CUMPLIMIENTO PARCIAL DE LOS REQUERIMIENTOS
PARA LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE
MAGISTER EN INGENIERÍA ELÉCTRICA.

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Carlos Negreira Universidad de la República
Dr. Federico Lecumberry Universidad de la República

TRIBUNAL

Dr. Pablo Musé Universidad de la República
Dr. Ignacio Ramírez Universidad de la República
Mag. Leonardo Steinfeld Universidad de la República
Dr. Álvaro Martín Universidad de la República

DIRECTOR ACADÉMICO

Dr. Federico Lecumberry Universidad de la República

Montevideo
11 de Diciembre de 2012

Procesamiento de Señales en Imagenía Ultrasónica e Inversión Temporal, Pablo Iturralde

ISSN 1688-2806

Esta tesis fue preparada en L^AT_EX usando la clase iietesis (v1.0).

Contiene un total de 94 páginas.

Compilada el jueves 28 marzo, 2013.

<http://iie.fing.edu.uy/>



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



ACTA DE DEFENSA
TESIS DE MAESTRÍA

Fecha: Martes 11 de diciembre de 2012

Lugar: Montevideo, Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

Plan de Estudio: Maestría en Ingeniería Eléctrica

Aspirante: Pablo Aparicio Iturralde Rodríguez

Documento de Identidad: 4.171.131-1

Director/es de Tesis: Dr. Carlos Negreira; Dr. Federico Lecumberry (co-DT)

Tribunal: Dr. Pablo Musé (IIE, Fac. Ingeniería);
Dr. Ignacio Ramírez (IIE, Fac. Ingeniería);
MSc. Leonardo Steinfeld (IIE, Fac. Ingeniería);
Dr. Álvaro Martín (INCO, Fac. Ingeniería);
Dr. Carlos Negreira (Fac. Ciencias).-

Los miembros del Tribunal hacen constar que en el día de la fecha el **Sr. Ing. Pablo Aparicio Iturralde Rodriguez** ha sido **APROBADO** en la defensa de su **Tesis de Maestría** titulada: **“Procesamiento de señales en imaginería ultrasónica e inversión temporal”**.

La resolución del Tribunal se fundamenta en los puntos detallados a continuación:

Se destaca la solvencia del aspirante para abordar un tema nuevo con elementos que están en la frontera del conocimiento, por ejemplo la técnica DORT abordada en la segunda parte del trabajo. En particular, ésta requiere de un entendimiento profundo de los fenómenos físicos involucrados, y la capacidad de modelizar estos fenómenos a los efectos de ser encarados como un problema de procesamiento de señales; ambas capacidades fueron ampliamente demostradas.

En lo que refiere a la componente experimental del trabajo, el candidato ha sabido plantear experimentos concretos, con equipamiento específico, para recabar datos reales y poner a



UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA



prueba las técnicas estudiadas e implementadas. En particular, en el transcurso de este trabajo surgieron dificultades técnicas asociadas al equipo de adquisición, que fueron sorteadas en muy buena forma por el candidato. Cabe igualmente destacar la autonomía de trabajo que demostró el candidato durante el transcurso de la tesis.

El manuscrito está muy bien redactado, la presentación fue muy buena; se aprecia la capacidad del candidato para comunicar ideas científicas y analizar profundamente los resultados. El candidato respondió con solvencia a las preguntas planteadas por los miembros del tribunal, demostrando madurez y conocimiento de los temas estudiados.

Para que conste,

Dr. Pablo Musé

Dr. Ignacio Ramírez

MSc. Leonardo Steinfeld

Dr. Álvaro Martín

Dr. Carlos Negreira

Agradecimientos

A Pablo Musé, por su apoyo académico y personal durante las primeras etapas de este trabajo.

A Gregory Randall, por su dedicación como Director Académico hasta comienzos de 2012.

A Federico Lecumberry, que aceptó participar como Director Académico y de Tesis aún cuando esta tesis se encontraba ya en un estado avanzado, y por su comprensión con mi situación personal en la última etapa del trabajo.

A María del Rosario, por soportarme siempre estudiando.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Resumen

Se presenta un estudio de algunas técnicas de procesamiento de señales utilizadas en la prospección ultrasónica de medios. Se atienden particularmente dos aplicaciones: la generación de imágenes de reflectividad por discontinuidad de impedancia acústica (ecografía, sonar) y los métodos de retorno temporal, especialmente el método de Descomposición del Operador de Retorno Temporal (DORT). En ambos casos se incluye un resumen del fundamento teórico y modelo físico en el que se basa cada aplicación, y se presentan implementaciones de algoritmos para el procesamiento de los datos asociados, junto con los resultados obtenidos y una discusión de los mismos.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Abstract

A study of signal processing techniques in ultrasound exploration is presented. Focus is set on two main applications: reflectivity image generation from acoustic impedance discontinuities (echography, sonar) and time reversal methods, particularly the Decomposition of the Time Reversal Operator (DORT). For both applications the underlying theory is presented, as well as the physical model that is being assumed. Implementations of relevant signal processing algorithms are presented, along with results and a discussion of those results.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Prefacio

En el año 2010 el Laboratorio de Acústica Ultrasonora del Instituto de Física de la Facultad de Ciencias (LAU) adquirió un nuevo equipo para el procesamiento electrónico de señales y su transducción a ultrasonido, capaz de manipular dos conjuntos de transductores de hasta 128 elementos. Con dicho equipo se abrieron oportunidades de investigación en técnicas de prospección ultrasónica que eran hasta el momento inaccesibles, como son la elastografía ultrarápida y el método DORT (estudiado en este trabajo). Estas técnicas requieren de la manipulación y adquisición de una cantidad significativamente mayor de datos para un experimento dado, y consiguientemente una mayor necesidad de procesamiento de señales. Esta necesidad dió origen a la colaboración entre el Dpto. de Procesamiento de Señales del Instituto de Ingeniería Eléctrica y el LAU en la que se enmarcó este trabajo.

Era la expectativa al comienzo de este trabajo que el nuevo equipo permitiera la adquisición de los datos relevantes y que los esfuerzos se concentraran en el procesamiento de dichos datos. Aunque durante las primeras etapas del trabajo fue posible trabajar con el equipo y adquirir datos de situaciones experimentales adecuadas para la prueba de algoritmos de generación de imágenes, existieron problemas técnicos con el equipo que dificultaron el proceso. Dichos problemas técnicos se acentuaron durante el transcurso de esta investigación, al punto que imposibilitaron la experimentación en la forma consistente que era necesaria para la segunda parte de este trabajo (método DORT). En consecuencia, los objetivos se reformularon a medida que los problemas con la adquisición se hicieron evidentes, y hasta fue necesario el abandono de ciertas líneas de trabajo. El trabajo aquí presentado debe considerarse en dicho contexto.

Esta tesis forma parte de mis estudios de Maestría en Ingeniería Eléctrica. Dichos estudios se desarrollaron con apoyo de una beca de posgrado de CSIC durante el período Julio-Diciembre 2010 y de la ANII en el período Junio 2011-Julio 2012.

El autor

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Tabla de contenidos

Acta de Defensa	I
Agradecimientos	III
Resumen	V
Abstract	VII
Prefacio	IX
Nomenclatura	XV
1. Introducción	1
2. Modelado de sistemas acústicos	3
2.1. Acústica lineal: ecuación de onda	3
2.1.1. Propagación	3
2.2. Sistemas emisión-respuesta	4
2.2.1. Emisión	5
2.2.2. Transmisión	5
2.2.3. Generación del eco	6
2.2.4. Recepción	6
2.2.5. Sensado	6
2.2.6. Modelo parcial	7
2.2.7. Transferencia H : medio homogéneo infinito	7
2.2.8. Aproximación de Born, o scattering simple	8
2.2.9. Transductores de dimensión y cantidad finita	8
2.2.10. Resumen del modelo final	10
3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar	11
3.1. Situación experimental	11
3.2. Estimación de interés	12
3.3. Limitaciones intrínsecas al sistema	12
3.4. Problema Inverso	14
3.4.1. Invertibilidad y condicionamiento	14
3.4.2. Sistemas activos y pasivos	15

Tabla de contenidos

3.5. Discretización del problema	16
3.6. Estimadores locales (propagación hacia atrás)	18
3.6.1. Delay and sum	19
3.6.2. Filtrado inverso	20
3.7. Estimadores globales	21
3.7.1. Costo computacional	22
3.7.2. Condicionamiento	22
3.7.3. Regularización	24
3.7.4. Reducción del costo computacional	25
3.7.5. Descomposición en frecuencia	26
3.7.6. Segmentación espacial	27
3.8. Algunos resultados	27
3.8.1. Situación experimental	28
3.8.2. Estimador local	28
3.8.3. Estimador global	29
3.8.4. Resultados	29
3.9. Conclusiones	31
4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)	35
4.1. Inversión temporal	35
4.1.1. Inversión temporal iterada	37
4.2. Fundamento teórico DORT	38
4.2.1. Comparación contra la inversión temporal iterada	39
4.3. Implementación	40
4.3.1. Determinación del número de reflectores relevantes	41
4.4. Análisis de valores y vectores propios	41
4.5. Simulador de ecos	42
4.6. Aplicación: determinación de la posición de los reflectores en un medio homogéneo	43
4.6.1. Situación experimental	45
4.7. Aplicación: DORT en un medio real, detección y localización de reflectores	46
4.8. Aplicación: focalización selectiva en medios no homogéneos mediante retorno temporal	53
4.8.1. Problemas con el equipo de adquisición	53
4.8.2. Trabajos pendientes	54
4.9. Conclusiones	54
5. Conclusiones	59
A. Principio de Huygens	61
A.1. Problema general de propagación en un medio homogéneo	61
A.1.1. Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff	61
A.1.2. Linealidad e invarianza	63

B. Resultados algebraicos relevantes para el desarrollo de DORT	65
B.1. Relación entre los valores y vectores propios asociados a un operador $K.C(*)$ y al operador hermítico KK^\dagger	65
B.2. Estudio de los valores y vectores propios del operador $K.K^\dagger$	66
Referencias	69
Índice de figuras	71

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Nomenclatura

Operadores

$\frac{\partial}{\partial t}$	Derivada parcial en el tiempo.
∇	Divergencia/gradiente según el contexto.
∇^2	Laplaciano.
$*_t$	Convolución temporal.
\cdot^T	Transposición.
$C(\cdot), \cdot^*$	Conjugación.
\cdot^\dagger	Transpuesta conjugada.
$\ \cdot\ $	Norma (L_2 si no se especifica otra cosa).

Parámetros y variables

Capítulo 2

$p, p(\vec{r}, t), p'(\vec{r}', t)$	Sobrepresión en un fluido.
$c, c(f)$	Velocidad de propagación de la ondas en el medio.
ρ_o	Densidad en reposo del fluido.
ϕ	Potencial de velocidad en el fluido, de manera que $\nabla\phi = \vec{v}$.
$h(\vec{r}, \vec{r}', t, t'), h(\vec{r}, \vec{r}', t-t')$	Respuesta impulsional del medio considerado (lineal invariante en el tiempo).
S	Superficie de reflexión.
V	Volumen interior a la superficie S ($\partial V = S$).
$P, P(\vec{r}, f), P'(\vec{r}', f)$	Señal de interés emitida (usualmente la sobrepresión), en el espacio de Fourier.
S_t	Superficie de emisión, determinada por los transmisores utilizados.
S_r	Superficie de sensado, determinada por los receptores utilizados.
$a_t(t), A_t(f), A_t$	Respuesta característica de los transductores en modo transmisión y su transformada de Fourier.
$H, H(f), H(\vec{r}, \vec{r}', f)$	Transformada de Fourier de la respuesta característica del medio.

Capítulo 0. Nomenclatura

$F, F(\vec{r}', f)$	Señal de interés (sobrepresión o potencial de velocidad) en el espacio de Fourier en un punto arbitrario del medio.
$R, R(f), R(\vec{r}, f)$	Reflectividad, asociada a la discontinuidad de impedancia acústica, en un punto arbitrario del medio.
$F_e, F_e(\vec{r}', f)$	Señal de interés reflejada en un punto arbitrario del medio.
$E, E(\vec{r}'', f)$	Señal de interés en la superficie de sensado.
$P_j, P_j(f)$	Señal emitida en el transmisor j-ésimo.
$E_i, E_i(f)$	Señal sensada en el receptor i-ésimo.
N_t	Número de transmisores.
N_r	Número de receptores.
N	Número de transductores cuando $N_t = N_r$.
\vec{r}	Coordenada espacial. Usualmente refiere a un punto en la superficie de transmisión.
\vec{r}'	Coordenada espacial. Usualmente refiere a un punto arbitrario del medio o de la superficie de reflexión.
\vec{r}''	Coordenada espacial. Usualmente refiere a un punto en la superficie de recepción.
\vec{r}_j	Ubicación espacial del transductor j-ésimo (en transmisión o recepción).
S_j	Superficie definida por el transductor j-ésimo (en transmisión o recepción).
$H_j(\vec{r}, f), H(\vec{r}_j, \vec{r}, f)$	Respuesta del medio desde un punto arbitrario \vec{r} al transductor j-ésimo (en transmisión o recepción).
$B_j, B_j(\vec{r}, f), B_j(\vec{r} - \vec{r}_j, f)$	Transferencia de transducción debida a la geometría de los transductores.
A	Área de los transductores.

Capítulo 3

$T(\vec{r}'), f, T$	Reflectividad aparente.
$\hat{R}(\vec{r}), \hat{R}$	Estimador de reflectividad.
$\hat{T}(\vec{r}), \hat{T}$	Estimador de reflectividad aparente.
$K_i(\vec{r}', f)$	Núcleo (matriz) de ecuación integral correspondiente a la medida i-ésima.
$X(\vec{r}', f)$	Incógnita de la ecuación integral.
$B, B(\vec{k}, f)$	Función de transferencia geométrica (en espacio de Fourier temporal y espacial) de los transductores (asumiendo transductores idénticos, coincide con B_j).
$y(t)$	Salida (medida) del problema inverso genérico.

$K(x, t)$	Núcleo del problema inverso genérico.
$w(x)$	Incógnita del problema inverso genérico.
δ	Delta de Dirac.
$A(x', t)$	Núcleo inverso.
μ_i	Valores singulares del operador asociado a la ecuación integral.
\vec{v}_i, \vec{u}_i	Vectores singulares asociados al valor propio μ_i .
$G, G(\vec{r}', f)$	Función de iluminación (coincide con F del capítulo 2).
f_s	Frecuencia de muestreo.
M	Número de muestras de las señales adquiridas.
y_j	Salida en el problema inverso discretizado.
K_{jk}	Núcleo del problema inverso discretizado.
w_k	Incógnita del problema inverso discretizado.
Q_x	Resolución de la grilla de discretización según la coordenada x .
Q_z	Resolución de la grilla de discretización según la coordenada z .
Q	Número de elementos de la grilla de discretización ($Q = Q_x \times Q_z$).
$r_k, r_k(f)$	Discretización de la reflectividad.
$x_k, x_k(f)$	Discretización de la incógnita (reflectividad o reflectividad aparente).
$e_j, e_j(f)$	Señal registrada en el problema discretizado.
$H_{ij}, H_{ij}(f)$	Transferencia del medio entre el emisor i -ésimo y el punto j -ésimo de la grilla de discretización.
$H_{kj}, H_{kj}(f)$	Transferencia del medio entre el sensor k -ésimo y el punto j -ésimo de la grilla de discretización.
$g_k, g_k(f)$	Discretización de la función de iluminación.
e_l, e_{jf}	Discretización de la respuesta registrada en frecuencia (canal j -ésimo, frecuencia f -ésima).
K_{kl}, K_{lk}, K_{jfk}	Discretización de la matriz de transferencia en frecuencia.
\vec{q}_k, q_{kl}	Filtro de estimación.
\vec{k}_k	Columna k -ésima de la matriz K_{kl} .
\vec{v}, v_l	Ruido aditivo a la señal sensada.
σ	Parámetro de regularización.

Capítulo 4

E	Vecotr de respuestas registradas (monocromáticas).
E_i	Vector de respuestas registradas en iteración i -ésima.
P	Excitación monocromática.
$K, K(f)$	Matriz de transferencia monocromática.

Capítulo 0. Nomenclatura

D	Número de reflectores.
K_D	Aproximación de rango D a la matriz de transferencia K .
$\lambda_i, \lambda_i(f)$	Valor propio i -ésimo de la matriz $K(f)$.
$b_i(f)$	Módulo del valor propio i -ésimo.
$\varphi_i(f)$	Fase del valor propio i -ésimo.
τ_i	Retardo (tiempo de vuelo) asociado al vector propio i -ésimo.
$\vec{v}_i(f)$	Vector propio i -ésimo de la matriz $K(f)$.
$\vec{h}_i(t)$	Señal no monocromática sintetizada a partir de los vectores propios monocromáticos.
$\vec{g}_i(t)$	Respuesta del sistema a la excitación dada por $h_i(t)$.

Capítulo 1

Introducción

Las ondas ultrasónicas son de gran utilidad en una variedad de aplicaciones que van desde la generación de imágenes médicas y tratamiento de patologías al estudio de fallas o inhomogeneidades en estructuras, pasando por la caracterización elástica de materiales y la prospección de medios desconocidos. En todos los casos, las ondas ultrasonoras son simplemente el vehículo utilizado para obtener información a partir de la interacción de las mismas con el (o los) objeto(s) de interés. La extracción de dicha información es realizada en el procesamiento *a posteriori* de las señales obtenidas en una experiencia dada. Es el objetivo de este trabajo realizar un estudio de dicho procesamiento, y la implementación de algunos algoritmos de uso común en el área.

El Capítulo 2 estudia el modelado de los sistemas de prospección ultrasónicos y algunas aproximaciones aplicables que permiten reducir dichos sistemas a un modelo lineal invariante en el tiempo. En particular se estudia la presencia de discontinuidades en la impedancia acústica de un medio y el modelado de dicha situación bajo la aproximación de Born de *scattering* simple [4].

El Capítulo 3 refiere al procesamiento de señales necesario para la generación de imágenes en un medio líquido homogéneo que presenta discontinuidades de impedancia acústica, una situación equivalente a la que resuelven los sistemas comerciales de radar, sonar y ecografía. Bajo el modelo desarrollado en el Capítulo 1, se estudiarán distintos estimadores para la reflectividad (como medida de la discontinuidad de impedancias) bajo diferentes aproximaciones, incluyendo sistemas de prospección activa (donde el medio es excitado por el experimentador) y pasiva (donde las fuentes ultrasónicas ocurren naturalmente en el medio). Se hará énfasis en la discusión sobre el costo computacional asociado a los distintos estimadores, y se presentarán implementaciones de algunos de ellos con ejemplos relevantes.

El Capítulo 4 estudia brevemente los métodos de retorno temporal, muy utilizados para la prospección de un medio homogéneo y la focalización de ondas en medios arbitrarios (no solo ondas ultrasónicas, sino también ondas electro-

Capítulo 1. Introducción

magnéticas [12]). Se profundiza luego en el método de Descomposición del Operador de Retorno Temporal (DORT) que fuera introducido por Prada et al. en 1996 [18], y cuya aplicación a distintos problemas de propagación de ondas en un medio ha sido muy estudiada. Se presenta una implementación del método, así como algunos resultados obtenidos con el mismo.

Finalmente, el Capítulo 5 presenta las conclusiones del trabajo y algunos lineamientos de posibles desarrollos futuros para continuar con esta investigación.

El trabajo cuenta con dos apéndices. El Apéndice A desarrolla algunos resultados teóricos sobre fenómenos ondulatorios que son utilizados para la deducción del modelo que se realiza en el Capítulo 2. El Apéndice B elabora sobre resultados algebraicos que forman parte de la fundamentación del método DORT como se describe en el Capítulo 4.

Capítulo 2

Modelado de sistemas acústicos

2.1. Acústica lineal: ecuación de onda

Bajo la suposición de pequeñas amplitudes, es posible demostrar [8] que las perturbaciones de presión p en un fluido cumplen con la ecuación de onda dada por la Ecuación 2.1,

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \nabla^2 p, \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad de propagación en el medio, usualmente asumida como constante, pero que podría tener una dependencia en frecuencia $c(f)$ (medio dispersivo) sin afectar el resto del modelo que se desarrollará.

Puede mostrarse también que el potencial ϕ del que deriva el campo de velocidades \vec{v} del fluido cumple también con la ecuación escalar de onda, y que el mismo se relaciona con la presión como muestra la Ecuación 2.2.

$$p = -\rho_o \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (2.2)$$

Dado este resultado, en lo que sigue se asumirá que la única variable de interés en el medio es la sobrepresión p . Cualquier otra variable acústica puede obtenerse a partir de ésta.

2.1.1. Propagación

Bajo las condiciones anteriores, la propagación de ondas en el medio puede tomarse como un sistema lineal invariante en el tiempo (ver apéndice A). En particular, se cumple que:

$$\int_S p(\vec{r}, t) *_t h(\vec{r}, \vec{r}', t' - t) d\vec{r} = p'(\vec{r}', t') \quad (2.3)$$

siendo la integral sobre una superficie cerrada S que encierra un volumen V ($S = \partial V$), p' es la sobrepresión en un punto interior al volumen V ($\vec{r}' \in V$) y $*_t$ la

Capítulo 2. Modelado de sistemas acústicos

convolución temporal de las señales. La función (o distribución) de transferencia h puede tomar distintas formas, dependiendo del medio y de las aproximaciones que se realicen sobre el mismo. Si el medio presenta una invarianza espacial (caso típico en la propagación en espacio libre) h dependerá únicamente de la diferencia $\vec{r} - \vec{r}'$. La aproximación más comúnmente utilizada es el principio de Huygens (ver Apéndice A), que asimila la respuesta al impulso a una onda esférica divergente desde cada punto en la superficie. Sobre la determinación de esta función se vuelve en las secciones subsiguientes. A efectos del análisis, la relación anterior puede expresarse más cómodamente en el espacio de frecuencias como muestra la ecuación 2.4.

$$\int_S P(\vec{r}, f) H(\vec{r}, \vec{r}', f) d\vec{r} = P'(\vec{r}', f) \quad (2.4)$$

2.2. Sistemas emisión-respuesta

La situación experimental más común en sistemas de ultrasonido consiste en la emisión de ondas a partir de un conjunto o *array* de transductores, y recepción de señales ultrasónicas sobre otro conjunto de transductores ¹, como se muestra en la Figura 2.1. Idealmente, el primero de estos conjuntos se dispone en una superficie S_t sobre la que es posible imponer una forma temporal para la variable de interés directamente, y el segundo conjunto determina otra superficie S_r sobre la que se realiza una medida de la misma señal. Interesa entonces modelar la transferencia entre la primera y segunda superficies, en función del medio en que se encuentran.

Si se asume como conocido el medio dado ² (es decir, la función $h(\vec{r}, \vec{r}', t' - t)$ es conocida $\forall \vec{r}, \vec{r}' \in V$), el proceso consiste esencialmente de 5 etapas:

- Transducción de las señales eléctricas excitadoras a señales acústicas en el medio.
- Propagación de la onda desde los transmisores hasta un punto de discontinuidad de la impedancia acústica (límite del medio conocido).
- Generación de una onda reflejada (eco) en dicho punto, a causa de la discontinuidad en la impedancia acústica (reflexión de la onda).
- Propagación del eco desde su punto de generación hasta los transductores que actúan como receptores.
- Transducción de la respuesta acústica a las señales eléctricas que serán registradas.

¹En principio los conjuntos pueden coincidir, y el uso en modo transmisión o recepción es administrado mediante ventanas temporales adecuadas. Éste es el caso en los experimentos realizados para este trabajo.

²En general esto no es cierto, ya que el medio es precisamente lo que se desea conocer.

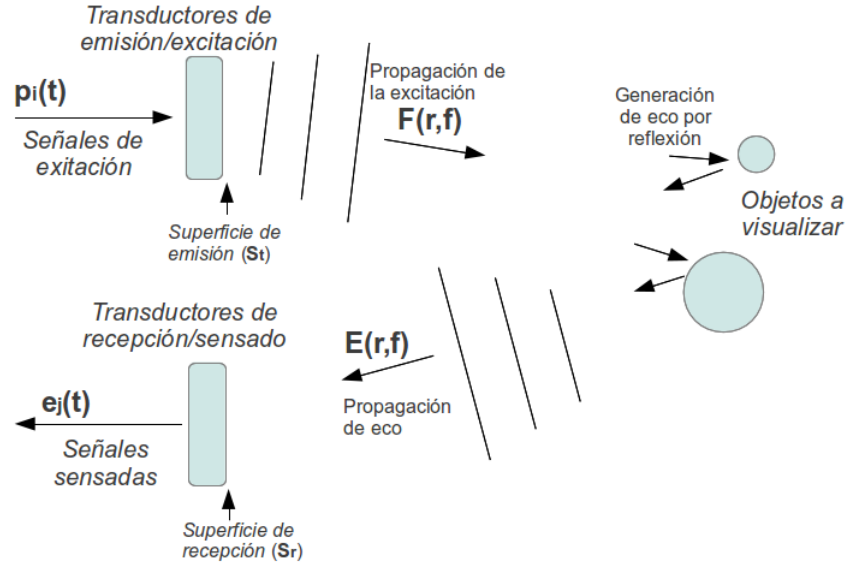


Figura 2.1: Diagrama de un sistema de emisión-respuesta para la prospección de un medio.

Estas cinco etapas pueden separarse en dos clases bien diferenciadas. Las etapas 2 a la 4 corresponden a la propagación acústica de las señales y por lo tanto están determinadas por las características físicas del medio que se desea explorar. Por otro lado, las etapas 1 y 5 corresponden a la transducción de estas señales a otras manejables por los instrumentos y serán éstas las que determinen la capacidad de trabajar con las señales de las otras etapas.

2.2.1. Emisión

Si asumimos los transductores de emisión como puntuales (restricción que se levantará más adelante), los mismos pueden caracterizarse por una respuesta temporal o, en forma equivalente, por su transferencia en frecuencia $A_t(f)$. Idealmente los transductores tienen una respuesta plana, de modo de que la presión en el medio coincida exactamente con la señal que se desea enviar. Los transductores reales tendrán siempre un ancho de banda característico (comportamiento pasa-bajos) que no será limitante para el sistema siempre que se trabaje con señales con un espectro contenido dentro de este ancho. Bajo dicha suposición se trabaja en lo que sigue, por lo que se asume $A_t(f) = 1$.

2.2.2. Transmisión

Aceptando lo establecido en la sección 2.1.1 respecto a la propagación de ondas, la relación entre la señal emitida $P(\vec{r}, f)$ y la señal en un punto cualquiera del espacio $F(\vec{r}', f)$ puede calcularse mediante la Ecuación 2.5

$$\int_{S_t} P(\vec{r}, f) H(\vec{r}, \vec{r}', f) ds = F(\vec{r}', f) \quad (2.5)$$

2.2.3. Generación del eco

Al encontrarse con un cambio abrupto de impedancia acústica (como el que ocurre en la interfase entre dos medios lineales), la señal se refleja -al menos parcialmente- dando lugar a un eco. Esto se modela como si en el punto de cambio de la impedancia acústica se generara una nueva señal. La nueva señal depende linealmente de la señal que llega a dicho punto, según una función de transferencia $R(\vec{r}', f)$ denominada reflectividad. Expresado en forma de Ecuación:

$$F_e(\vec{r}', f) = R(\vec{r}', f)F(\vec{r}', f) \quad (2.6)$$

Reflectividad en el espacio de Fourier

Puede probarse que en el caso de que los medios de propagación sean conservativos no dispersivos, el segundo medio sea infinito (a efectos de que no se generen reflexiones internas en el mismo) y no exista tampoco algún tipo de disipación en la interfase donde se origina el eco, la reflectividad no dependerá de la frecuencia:

$$R(\vec{r}', f) = R(\vec{r}') \quad (2.7)$$

En una versión menos estricta, esta simplificación puede realizarse al menos para un intervalo acotado de frecuencias, lo que puede ser útil cuando se trabaja con señales de ancho de banda contenido dentro de este intervalo. La simplificación es de particular interés cuando se realiza la prospección de un medio desconocido, como se ve en el Capítulo 3.

2.2.4. Recepción

En forma análoga a lo expresado para la transmisión, el proceso de recepción puede modelarse como una propagación del eco generado hacia los transductores de sensado. Cuando la transferencia del medio es conocida, este proceso queda descrito por la Ecuación 2.8, donde $E(\vec{r}'', f)$ es la componente debida a la señal sobre los receptores.

$$E(\vec{r}'', f) = F_e(\vec{r}', f)H(\vec{r}', \vec{r}'', f) \quad (2.8)$$

2.2.5. Sensado

En forma simétrica con lo desarrollado para la etapa de excitación del medio, el proceso de sensado puede caracterizarse, cuando se asumen transductores puntuales, por una respuesta temporal de dichos transductores, o su transferencia en frecuencia $A_r(f)$. Para esta transferencia valen las mismas consideraciones realizadas sobre la transferencia de excitación $A_t(f)$.

2.2.6. Modelo parcial

A partir de los resultados de las secciones anteriores se puede modelar el proceso completo de emisión, propagación, reflexión (generación de eco), propagación del eco y recepción del mismo dado un medio. Para esto debe considerarse que el eco no se genera en un punto del espacio, si no que lo hace en múltiples puntos, o más generalmente en una superficie S que representa la interfase entre el medio en cuestión y otros medios adyacentes. Incorporando esto, la relación entre la señal registrada y la señal enviada queda descrita por la Ecuación 2.9.

$$E(\vec{r}'' , f) = \int_S H(\vec{r}'' , \vec{r}' , f) R(\vec{r}' , f) \left(\int_{S_t} H(\vec{r}' , \vec{r} , f) P(\vec{r} , f) d\vec{r} \right) d\vec{r}' \quad (2.9)$$

Para obtener un modelo realista y utilizable en situaciones experimentales, restan considerar tres elementos:

1. las características de la función de propagación del medio $H(\vec{r} , \vec{r}' , f)$
2. el hecho de que los transductores sean de tamaño finito
3. el efecto de tener una superficie de transducción finita (y por lo tanto también una cantidad discreta de transductores)

Estos puntos son desarrollados en las las siguientes secciones.

2.2.7. Transferencia H : medio homogéneo infinito

Aunque rara vez el medio de estudio corresponda a un medio homogéneo infinito, ya que de conocerse dicha situación no habría nada que estudiar, interesa determinar la forma funcional de H para dicho medio por dos motivos. Primero, es la situación experimental más sencilla imaginable y por lo tanto sobre la que se pueden realizar más estudios y predicciones analíticas. Segundo, la aproximación de Born, que se discute en la próxima sección, permite utilizar dicha transferencia como una primera aproximación en medios más complejos.

En el caso general, la respuesta H está determinada por las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de las perturbaciones en el medio y las condiciones de borde del mismo. Asumir un medio homogéneo infinito implica una velocidad de propagación constante c en todo el medio y la ausencia de condiciones de borde (la misma ecuación de onda se cumple para todo punto del espacio). A tal transferencia se le denomina función de propagación libre, o función de Green, pues es necesaria para deducir la Ecuación 2.3 utilizando la segunda igualdad de Green. La forma exacta de dicha solución depende de las consideraciones que se hagan sobre la variable de interés (en este caso la sobrepresión) en la superficie de los transductores. La función más simple que puede utilizarse es la que corresponde a la propagación de ondas esféricas, de acuerdo al principio de Huygens, como puede verse en la Ecuación 2.10. Un desarrollo más completo de la deducción

Capítulo 2. Modelado de sistemas acústicos

de esta función puede encontrarse en el Apéndice A.

$$H(\vec{r}, \vec{r}', f) = \frac{e^{-j2\pi\frac{f}{c}|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (2.10)$$

2.2.8. Aproximación de Born, o scattering simple

En el modelo desarrollado (Ecuación 2.9) la función de propagación del medio, H , y la reflectividad de la interfase R , así como la forma de dicha interfase S parecen ser independientes entre sí, pero como se discute en las sección anterior, este no es el caso siempre que existan condiciones de borde sobre el medio en cuestión (H no puede estar bien definida si no se conocen S y R). La aproximación de Born desacopla esta dependencia, suponiendo que la forma de H coincide con la que sería la función de propagación libre, es decir, si la superficie S no existiera a efectos de las propagaciones que describe H . Se supone entonces que la onda se propaga en forma libre desde los transductores a los puntos de generación de eco y viceversa. En términos físicos, esto es equivalente a suponer que la onda atraviesa un único proceso de scattering (se propaga hacia el punto de reflexión, se refleja y vuelve a propagar) y no existe posibilidad de que el eco mismo se refleje sobre otro punto de la interfase [4, 10].

Esta aproximación nunca puede ser estrictamente cierta, ya que el eco generado en cualquier punto del medio eventualmente se propagará hacia el resto, incluidos otros puntos de la interfase, generando ecos secundarios y así sucesivamente. Sin embargo, la aproximación es en general satisfactoria pues los ecos secundarios y de mayor orden se ven más atenuados debido a la mayor distancia de propagación y pueden llegar a ser despreciados respecto de los primeros. Adicionalmente, la aproximación resulta muy útil para el planteo del problema inverso que surge al utilizar ultrasonido para hacer prospección de un medio de propiedades conocidas pero geometría desconocida, como se verá en el capítulo 3.

2.2.9. Transductores de dimensión y cantidad finita

Los transductores son los dispositivos que realizan la conversión necesaria entre la señal acústica de interés y las señales eléctricas que utiliza el sistema de control y procesamiento digital. Idealmente, estos dispositivos tienen dimensiones despreciables (puntuales) y una transferencia unitaria. Como se describe en las secciones referidas a la emisión y sensado, la transferencia unitaria no es tal en una situación real, y tampoco lo es asumir dimensiones despreciables. Es necesario entonces introducir un modelo de la geometría de éstos y realizar un pasaje del modelo continuo anterior a uno con un número discreto de elementos donde se realiza la emisión y la recepción.

Se pasa entonces a tener N señales en emisión ($P_j(f)$ (una por transductor utilizado en la emisión)), correspondientes a transductores ubicados en posiciones

2.2. Sistemas emisión-respuesta

$\vec{r} = \vec{r}_j$) y M señales en recepción (una por transductor utilizado en el sensado). La transducción que se realiza no es entonces punto a punto, si no que cada transductor integra (en el modelo más sencillo) la respuesta recibida sobre toda su superficie. El modelo para dicho proceso pasa por modificar la Ecuación 2.5, hacia la forma dada por 2.11

$$F(\vec{r}', f) = \sum_j P_j(f) \cdot \int_{S_j} H(\vec{r}, \vec{r}', f) d\vec{r} \quad (2.11)$$

donde la integral en S_j es sobre la superficie de cada transductor (de superficie total A). La respuesta asociada al proceso de propagación más la transducción en el elemento j del conjunto de transductores (H_j) puede calcularse como muestra la Ecuación 2.12. Dicha respuesta se aproxima, en el caso de que la superficie A sea suficientemente pequeña³, por el producto de la función de propagación hacia el centro del transductor (transducción ideal) con un término que depende únicamente de la geometría de dicho transductor ($B_j(\vec{r}, f)$).

$$H_j(\vec{r}, f) = \int_{S_j} H(\vec{r}, \vec{r}', f) d\vec{r} \approx H(\vec{r}_j, \vec{r}', f) \cdot \int_{S_j} d\vec{r} = H(\vec{r}_j, \vec{r}', f) \cdot B_j(\vec{r} - \vec{r}_j, f) \quad (2.12)$$

En el caso más común, las funciones B_j son iguales para todo elemento del conjunto⁴, pues la geometría de los mismos es idéntica. En cualquier caso, las funciones B_j determinan la capacidad de transducir señales que provienen de un punto \vec{r} y por lo tanto suelen ser las limitantes del “campo visual” del sistema. Sobre el rol limitante de estas funciones se discute en el capítulo 3 pero, en forma similar a lo hecho para las funciones $A_t(f)$, se asumirá que las mismas son planas en la zona de interés sobre la que se trabajará.

Tomando en cuenta la discretización anterior tanto para la emisión como para la recepción, la Ecuación 2.9 puede re-escribirse como un conjunto de M ecuaciones distintas. Definiendo primero la respuesta que se transduce en los sensores discretos como la integral de la respuesta puntual sobre los mismos, como muestra la Ecuación 2.13, se obtiene el modelo de propagación total con transductores discretos de la Ecuación 2.14.

$$E_i(f) = \int_{S_i} E(\vec{r}'', f) d\vec{r}'' \quad (2.13)$$

$$E_i(f) = \int_S H_i(\vec{r}', f) \cdot R(\vec{r}', f) \cdot \sum_j P_j(f) \cdot H_j(\vec{r}', f) d\vec{r}' \quad (2.14)$$

³Aquí pequeña es en comparación con las distancias características de $H(\vec{r}, \vec{r}_j, f)$, dados \vec{r}_j y f . Dado el comportamiento del sistema físico, esta aproximación se sostiene siempre que \vec{r} sea suficientemente lejano al transductor $|\vec{r} - \vec{r}_j| \gg \sqrt{A}$.

⁴Esto no tiene por qué ser así. Un conjunto de transductores irregular podría tener una mejor respuesta espectral que uno de transductores idénticos [13].

2.2.10. Resumen del modelo final

El modelo descrito por la Ecuación 2.14 es el más completo que se discute aquí para sistemas ultrasónicos de emisión-recepción. En este modelo, las funciones P_j representan las señales excitadoras que se busca emitir en cada uno de los j transductores, las funciones E_i representan las señales registradas en la etapa de sensado para los transductores i , H_j representa la transferencia de transducción y propagación desde el transductor de emisión j -ésimo hacia cualquier punto del medio (que depende según la Ecuación 2.11 de la función de propagación del medio, H , y la geometría de los transductores), y en forma análoga H_i representa la transducción y propagación hacia los sensores. La superficies S representa la interfase del medio principal (sobre el que se realiza la excitación y el sensado), en donde se genera eco. La función de reflectividad R establece la relación entre el eco generado y la señal incidente original.

En la situación experimental de prospección de un medio, en general las funciones P_j son elegibles por el experimentador, las funciones E_i son medibles, las funciones H_i y H_j son conocidas o aproximables por funciones conocidas, y la función de reflectividad R (junto a la superficies S) es la incógnita. El desarrollo de estimadores experimentales para R y S se trata en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

3.1. Situación experimental

Los sistemas de ecografía, sonar y radar tienen como objetivo la formación de imágenes de un medio que se desea explorar, mediante la insonificación del medio y la recepción de los ecos correspondientes. La ecografía y el sonar funcionan mediante la emisión de ondas acústicas, mientras que el radar emite ondas electromagnéticas. A grandes rasgos, todos ellos funcionan bajo un modelo de sistema como el que se describió en el Capítulo 2 y comparten el mismo principio de funcionamiento. Dentro del modelo descrito en dicho capítulo, tanto las transferencias de transducción como las asociadas a la propagación de ondas en el medio son conocidas. Adicionalmente, se miden las respuestas $E_i(f)$ mediante los transductores de recepción, y dependiendo de la situación, se conocen o se pueden elegir las señales excitadoras $P_j(f)$. En tal situación, la única incógnita es la reflectividad local del medio $R(\vec{r}, f)$, que se asumirá constante en el intervalo de frecuencias de interés ($R(\vec{r})$)¹.

Antes de continuar debe notarse que la disociación entre las funciones de propagación en el medio, que se aceptan como las funciones de propagación en el espacio libre de acuerdo a lo desarrollado en el Apéndice A, y la reflectividad o presencia de inhomogeneidades en el mismo implica la simplificación de scattering simple o primera aproximación de Born, como se presentó en el Capítulo 2. Esto evidentemente no es compatible con la noción de que exista más de un punto con reflectividad no nula en el medio a explorar, pero lleva a una sencilla y adecuada generación de imágenes del medio.

¹Aunque la superficie de reflexión también es una incógnita, la integral superficial puede sustituirse por una integral volumétrica donde el integrando está multiplicado por una indicatriz de pertenencia a la superficie en cuestión $\int_S R(\vec{r}, f) d\vec{r} = \int_V R(\vec{r}, f) \delta(\vec{r} \in S) d\vec{r}$. De esta manera la superficie S y la reflectividad R pasan a unirse como una única incógnita en el integrando.

3.2. Estimación de interés

El problema de interés es estimar la función $R(\vec{r})$, conocidas las funciones recibidas ($E_i(f)$) en los sensores y la función de propagación en el medio, $H(\vec{r}, \vec{r}', f)$. Es posible que se conozcan también las señales de excitación del sistema $P_j(f)$, en cuyo caso la estimación se denomina activa, o que dichas funciones sean desconocidas (pues el medio es insonificado por un sujeto ajeno al experimentador ²). La situación es modelada para la estimación activa según la Ecuación 3.1 y para el sistema pasivo puede utilizarse en forma equivalente la Ecuación 3.2, donde todas las incógnitas se unieron en una única variable a estimar, de acuerdo a la sustitución dada por la Ecuación 3.3.

$$E_i(f) = \int_S H_i(\vec{r}', f) \cdot R(\vec{r}', f) \left(\sum_j P_j(f) H_j(\vec{r}', f) \right) d\vec{r}' \quad (3.1)$$

$$E_i(f) = \int_S H_i(\vec{r}', f) T(\vec{r}', f) d\vec{r}' \quad (3.2)$$

$$T(\vec{r}', f) = R(\vec{r}', f) \sum_j P_j(f) \cdot H_j(\vec{r}', f) \quad (3.3)$$

En el caso activo, se denomina estimador a una función $\hat{R}(\vec{r})$ que se obtiene como función de E_i y P_j dados H_j y H_i , y que idealmente será idéntica a la reflectividad que se desea estimar ($\hat{R} \approx R$). En el caso pasivo, el estimador sería $\hat{T}(\vec{r})$, que se construye a partir de las funciones E_i y H_i , e intenta estimar la reflectividad aparente ($\hat{T} \approx T$). Debe notarse que en ambos casos la incógnita a despejar o estimar, es parte de una ecuación integral de primer tipo como se muestra en la Ecuación 3.4 que se tomará de referencia para discutir la resolución del problema. En las próximas secciones se discutirán distintas estrategias de resolución o aproximación a la solución.

$$E_i(f) = \int_S K_i(\vec{r}', f) X(\vec{r}', f) d\vec{r}' \quad (3.4)$$

3.3. Limitaciones intrínsecas al sistema

Antes de discutir estimadores particulares, es interesante analizar qué tipo de estimaciones es posible esperar dada la información disponible sobre el sistema. Desde el punto de vista teórico, existen tres grandes limitantes que separan el caso

²Situación típica en sonar de guerra: se desea ubicar otro objeto sin emitir señales que permitan al enemigo la ubicación propia [2].

3.3. Limitaciones intrínsecas al sistema

experimental real de uno ideal ³.

- El conjunto de los sensores no recubre completamente una superficie cerrada que encierre el medio que se desea investigar (apertura finita).
- Los sensores son de tamaño finito, no puntuales, lo que limita las señales que pueden obtenerse mediante los mismos.
- Los sensores reales son incapaces de medir simultáneamente la presión y la velocidad normal a la superficie del sensor.

La primera de estas limitaciones, la de apertura finita, ha sido muy estudiada en el contexto de la teoría de la difracción [5, 6]. Su efecto, para puntos alejados de los sensores (de manera que valga la aproximación de Fraunhofer para campo lejano ⁴), es limitar la resolución del sistema en forma inversamente proporcional al tamaño de la superficie sensada. Por ejemplo, si en el medio se encuentran presentes dos reflectores separados una distancia d entre sí, existirá un tamaño mínimo de la apertura que permitirá distinguirlos para una frecuencia de trabajo dada (en el caso bidimensional, si los reflectores se encuentran alineados en forma paralela a la apertura, el tamaño mínimo de la apertura según el criterio de resolución de Rayleigh es $A \geq \frac{z\lambda}{d}$, siendo z la distancia de la apertura a los reflectores y λ la longitud de onda utilizada). Este límite en la resolución está fuertemente condicionado a su vez por el espectro de las señales utilizadas, en particular las frecuencias más altas que se utilicen.

La segunda limitación, asociada a la geometría de los transductores, determina una zona del medio en cuestión que es posible sensar con los transductores que se tienen. Intuitivamente, esta limitación responde a que los transductores integran una señal en determinada zona del espacio. Según las características de dicha señal, la integración podría dar lugar a una interferencia constructiva entre los distintos puntos, incrementando la señal registrada, o destructiva, atenuando dicha señal. Dado un transductor y su geometría, en la aproximación de campo lejano ⁵ se le puede asociar al mismo una función de transferencia $B(\vec{k}, f)$ en el espacio de frecuencia espacial y temporal. En la situación ideal, el transductor tiene dimensiones despreciables (respecto de las longitudes de onda utilizadas en el sistema) y la respuesta B es esencialmente plana.

³Debe notarse que para el caso ideal, la teoría predice que es posible determinar la evolución de la señal de interés en todos los puntos interiores al medio, lo que es equivalente a despejar exactamente la variable incógnita.

⁴La aproximación de Fraunhofer refiere a que el producto de longitud de onda por distancia sea mucho mayor al cuadrado de la apertura. En el contexto de ondas de ultrasonido, esto significa distancias del orden de metros.

⁵Debe notarse aquí que dados que los transductores suelen ser pequeños en sus dimensiones, campo lejano en términos de ondas ultrasónicas en este contexto puede referirse a distancias mayores a unos pocos milímetros.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

En caso de que las limitantes anteriores no estuvieran presentes, la incapacidad de poder medir tanto la sobrepresión como su derivada temporal (o equivalentemente, la velocidad normal del fluido en la superficie de interés) limita la resolución del sistema. Sin embargo, cuando se trabaja con una superficie de medida finita y plana, es posible elegir una función de propagación en el medio (función de Green) en donde sea innecesario conocer la sobrepresión o su derivada (ver Apéndice B).

Todas estas limitantes físicas pueden estudiarse también del punto de vista del procesamiento de señales, en la medida que determinan la forma de la matriz K del problema inverso (Ecuación 3.4) que debe resolverse. Se estudiará esto en mayor detalle para cada uno de los tipos de estimación: activa y pasiva.

3.4. Problema Inverso

Se denomina problema inverso al problema de despejar el integrando, o parte de este, de una ecuación integral, como la que resulta en los problemas de estimación anteriormente mencionados. La Ecuación 3.5 representa la forma general de los problemas inversos cuando son conocidos el resultado de la integral $y(t)$ (medida o respuesta) y el término $K(x, t)$ (transferencia), y la incógnita es $w(x)$ (entrada).

$$y(t) = \int K(x, t)w(x)dx \quad (3.5)$$

Puede verse simplemente que la situación experimental presentada anteriormente puede modelarse como una ecuación de esta naturaleza, y por lo tanto la estimación de la reflectividad R es un problema inverso.

El problema inverso no siempre es resoluble exactamente, y su solución está fuertemente ligada a la naturaleza de la respuesta K . En las próximas secciones se analizan las diversas situaciones que pueden presentarse, y las posibles soluciones en dichos casos.

3.4.1. Invertibilidad y condicionamiento

Se llama solución -exacta- al problema inverso el encontrar una función $A(x', t)$ (denominada inversa) que cumpla con la Ecuación 3.6.

$$\int A(x', t)K(x, t)dt = \delta(x - x') \quad (3.6)$$

De existir dicha función, puede obtenerse $w(x)$ exactamente mediante el cálculo lineal representado por la Ecuación 3.7.

$$w(x) = \int A(x, t)y(t)dt \quad (3.7)$$

3.4. Problema Inverso

La existencia de la función inversa depende, naturalmente, de la función $K(x, t)$. Generalmente es posible decir que si se tiene la descomposición SVD de K en funciones (ortonormales) y valores propios ⁶, alcanza con que dichos valores propios sean todos no nulos para garantizar la invertibilidad en este sentido. Sin embargo, este no es usualmente el caso, pues el operador K (asumido lineal) presenta un espacio nulo, por lo que mapea distintas funciones $w(x)$ sobre la misma medida $y(t)$. En dicho caso el problema tiene múltiples soluciones, y la búsqueda de soluciones suele restringirse a encontrar aquella que cumple con alguna restricción adicional. Una restricción comúnmente utilizada es la de hallar la solución de norma (L_2) mínima [1].

El problema aumenta en presencia de ruido, donde aún un problema invertible en teoría, puede no resultar invertible debido a que dos funciones $w_1(x)$ y $w_2(x)$ distintas se mapeen en valores de medida $y_1(t)$ y $y_2(t)$, que no son distinguibles entre sí. Este potencial mal condicionamiento del sistema se suele cuantificar mediante el cociente $cond = \frac{\mu_i^{max}}{\mu_i^{min}}$ de los valores propios máximo y mínimo que surgen de la descomposición SVD del operador.

A modo de ejemplo, el problema de estimación pasiva en un medio homogéneo, donde el operador K responde a la transferencia de Huygens, está mal condicionado. Si consideramos dos reflectores alejados de los sensores en la misma dirección dada por el ángulo θ , pero arbitrariamente distantes entre ellos, las medidas asociadas a ondas provenientes de cada uno de ellos serán arbitrariamente parecidas, al punto que ningún sistema de procesamiento será capaz de distinguirlas en una situación experimental real donde haya ruido presente.

Aunque estas consideraciones estén realizadas para el problema inverso asociado a una ecuación de Fredholm de primer tipo, donde tanto el espacio de la función incógnita como el espacio de las medidas son continuos (y por lo tanto de dimensión infinita), consideraciones similares pueden realizarse para un sistema experimental en que las medidas son necesariamente discretas y dimensionalmente finitas⁷.

3.4.2. Sistemas activos y pasivos

Como se establece al principio de este capítulo, la estimación de interés siempre puede expresarse de acuerdo a la Ecuación 3.2, que es una ecuación integral de primer orden en la reflectividad aparente $T(\vec{r}', f)$, definida por la Ecuación 3.3. Debe notarse que en ningún caso es de interés estimar la reflectividad aparente T , sino que la verdadera incógnita es la reflectividad real R , aunque esto no es posible

⁶La descomposición SVD puede escribirse como: $K(x, t) = \sum_i \mu_i u_i(x) v_i(t)$, donde los $\{u_i(s)\}$ y los $\{v_i(t)\}$ son bases de funciones para los espacios de $w(x)$ e $y(t)$ respectivamente, y se cumple que $\int K(x, t) v_i(t) dt = \mu_i u_i(x)$ y $\int K(x, t) u_i(x) dx = \mu_i v_i(t)$.

⁷Si el espacio de las medidas tiene dimensión menor al espacio de las funciones entonces el problema es necesariamente no invertible y tiene múltiples soluciones.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

para los sistemas pasivos.

La diferencia entre los sistemas activos y pasivos pasa por el conocimiento de la función de “iluminación” $G(\vec{r}, f) = \sum_j P_j(f) \cdot H_j(\vec{r}, f)$, que relaciona la reflectividad real R con la reflectividad aparente T . En los primeros, dicha función es conocida (y usualmente elegible dentro de ciertas restricciones⁹) y por lo tanto puede utilizarse para la estimación de R . En los sistemas pasivos, la función de iluminación es desconocida, por lo que solo puede estimarse T .

Los sistemas pasivos son entonces necesariamente menos informativos respecto de la incógnita, pero usualmente menos complejos en su implementación y más estables a la hora de su inversión, ya que la función de transferencia $H(\vec{r}, \vec{r}, f)$ es generalmente invertible¹⁰ pero la función de iluminación $G(\vec{r}, f)$ no necesariamente lo es. Finalmente es interesante notar que aún teniendo la función de iluminación, es posible tratar un sistema activo como si fuera pasivo, y reducir la estimación a la reflectividad aparente.

En términos físicos, los sistemas pasivos carecen generalmente de información de tiempo de vuelo¹¹, por lo que la localización precisa de los reflectores es más problemática, en particular cuando se trabaja en campo lejano.

3.5. Discretización del problema

Aunque es posible buscar un operador continuo que invierta la ecuación integral dada por las Ecuaciones 3.2 o 3.1 para dar lugar a una solución exacta al problema, su existencia no está garantizada y no existe ningún método que garantice poder encontrar dicha solución en caso de que existiese. Es posible incluso conjeturar que debido a que la dimensionalidad del espacio de la incógnita (espacio de todas las posibles reflectividades del medio) es mayor a la dimensionalidad del espacio de medida al que tenemos acceso (N señales temporales, siendo N el número de transductores de medida), el operador que lleva de un espacio al otro no puede ser invertible. Más aún, el acceso que es posible tener al espacio de medidas es completamente discreto: se trata de N señales muestreadas con una frecuencia dada f_s , durante un intervalo de tiempo finito T para un vector total de datos de dimensión $N \times T \cdot f_s = N \times M$. Esta naturaleza discreta de la medida sugiere que una aproximación discreta al problema, que se reduce a un sistema lineal de la

⁸En analogía con una situación similar en óptica. El término estrictamente correcto es “insonificar”.

⁹Lo elegible son las funciones de excitación $P_j(f)$, pero no las transferencias $H_j(\vec{r}, f)$, lo que limita la capacidad de seleccionar una función de iluminación arbitraria

¹⁰En el sentido de que es no nula para cualquier pareja de puntos del espacio.

¹¹Por tiempo de vuelo se entiende el tiempo que le toma a una perturbación originada en un punto A alcanzar un punto B, originalmente en reposo.

3.5. Discretización del problema

forma $y_j = K_{ij}.w_j$ sea la forma más accesible de obtener una solución.

La primera discretización que debe discutirse es la asociada al muestreo de las señales temporales en recepción. Aunque en primera instancia puede asumirse que esto no es restrictivo en ningún sentido siempre que se trabaje con señales con componentes en frecuencia por debajo del criterio de Nyquist, debe notarse que en general estos sistemas trabajan con excitaciones, y por lo tanto respuestas, pulsadas cuyo espectro en general no es posible acotar [15]. De todas maneras es posible asumir que la energía de la señal en las frecuencias por encima de este valor es mucho menor a la energía total de la señal en todos los casos de uso, y trabajar bajo la hipótesis de que la señal se encuentra completamente representada por las muestras.

La segunda discretización refiere a la función incógnita, en este caso la reflectividad del medio $R(\vec{r}, f)$. Ésta es la más relevante pues refiere a un espacio que es inherentemente continuo y sobre el que no existen restricciones de ningún tipo, en particular respecto de las frecuencias espaciales que pueden existir. La elección de la grilla resulta clave en la implementación de cualquier algoritmo de resolución del problema, pues determina la matriz K_{ij} , que a su vez define la invertibilidad y condicionamiento del problema. A efectos de realizar el planteo del problema discretizado, se acepta de momento la existencia de una grilla apropiada para resolver el problema y se asumirá que el número total de sus componentes es Q (en un ejemplo bidimensional, podría utilizarse una grilla rectangular de tamaño $Q_x \times Q_z = Q$). En este caso la función incógnita $R(\vec{r}, f)$ pasa a representarse por un vector de elementos $r_k(f)$ de tamaño Q , donde cada elemento representa la reflectividad local de un punto de la grilla elegida. Bajo esta suposición, la ecuación integral 3.4 se reduce a la siguiente ecuación matricial/tensorial en el espacio de Fourier:

$$e_j(f) = H_{jk}(f).r_k(f).H_{ki}(f).p_i(f), \quad (3.8)$$

donde se asume la convención de Einstein, bajo la que las sumatorias en los índices que se repiten están implícitas. Renombrando g a la señal que llega a cada punto del medio ($g_k(f) = H_{ki}(f).p_i(f)$) y asociando a los tensores conocidos en un único tensor $K_{jk}(f) = H_{jk}(f).g_k(f)$ se obtiene el sistema de ecuaciones dado por 3.9 en la forma matricial usual, que representa generalmente a un problema inverso discretizado (a partir de aquí se denomina x_k a las incógnitas del problema, que coinciden con r_k en el problema de estimación de reflectividad, pero pueden representar otras variables, como en el problema de estimación de la reflectividad aparente):

$$e_j(f) = K_{jk}(f).x_k(f) \quad (3.9)$$

Donde existen P incógnitas y N ecuaciones para cada frecuencia. De trabajarse sobre este caso monocromático, debe notarse que el operador K_{jk} lleva del espacio de alta dimensión de la grilla de reflectividades a uno de menor dimensión (en casi todos los casos de interés) y por lo tanto no es directamente invertible.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

En caso de aceptar la aproximación de que la reflectividad no es dependiente en la frecuencia¹², trabajar con múltiples frecuencias resultaría en agregar nuevas ecuaciones al sistema sin aumentar la cantidad de incógnitas. En este caso el sistema (discretizado en frecuencia) puede ser representado como:

$$e_{jf} = K_{jfk} \cdot x_k, \quad (3.10)$$

donde las incógnitas continúan siendo Q (correspondiente al índice k) y las ecuaciones ahora son $M \times N$ (correspondientes al subconjunto de índices jf , que se simplifican en lo que sigue por el índice l), donde N es el número de sensores utilizados para el registro, y M el número total de muestras registradas del eco en cada canal.

A efectos del análisis que sigue, es conveniente interpretar el sistema anterior como una superposición de las respuestas correspondientes a una reflexión de la onda en cada punto del medio (representado por las columnas de la matriz K_{lk}), ponderadas por la reflectividad correspondiente a cada punto del espacio (x_k). La Ecuación 3.11 refleja dicha superposición.

$$e_l = K_{lk} x_k \quad (3.11)$$

3.6. Estimadores locales (propagación hacia atrás)

Se denominan estimadores locales (o algoritmos de *beamforming*) a aquellos que invierten el modelo simplificado dado por la Ecuación 3.12, en lugar del modelo completo de la Ecuación 3.11. El sistema simplificado es equivalente a suponer que en el sistema original existe un único reflector puntual de interés (denominado con el subíndice 1), o que al menos para la estimación de la reflectividad de un punto, el resto de las reflectividades y las señales debido a éstas son irrelevantes y pueden modelarse como un ruido aditivo v_l .

$$e_l = K_{l1} \cdot x_1 + v_l \quad (3.12)$$

Los estimadores lineales basados en este modelo toman la forma dada por la Ecuación 3.13, y se les denomina filtros de propagación hacia atrás pues su funcionamiento equivale a generar una predicción de la magnitud de la onda que proviene desde cierto punto del espacio, conociendo la función de propagación del medio, y aplicando un filtro q_{l1} relacionado con la misma.

¹²Sin realizar algún tipo de hipótesis sobre la dependencia en frecuencia de la reflectividad, el problema resulta indeterminado y muy poco podría hacerse para resolverlo. La hipótesis aquí realizada es en principio la más fuerte que puede hacerse sobre esta dependencia, pero es aceptable en el caso general de que los medios tengan impedancias acústicas no dependientes en la frecuencia, o se trabaje en un intervalo espectral acotado (banda angosta).

3.6. Estimadores locales (propagación hacia atrás)

$$\hat{x}_1 = q_{1l} \cdot e_l \quad (3.13)$$

En todos los estimadores locales, por su naturaleza, la capacidad de resolver reflectores estará dada por la relación entre los espacios vectoriales determinados por la señal de interés y el ruido aditivo a la misma. Dada la formulación del problema es inmediato ver que la resolución ideal de los reflectores (es decir, $\hat{x}_1 = x_1$) dependerá de la ortogonalidad entre el vector filtro q_{1l} y las columnas de la matriz K_{l1} asociadas a los otros reflectores presentes en el sistema ($K_{lj}, \forall j \neq 1$). Este requerimiento implica que, considerando K_{lk} como una matriz, todas las columnas deben ser linealmente independientes, y en ese caso debe ser posible encontrar el conjunto de filtros q_{kl} que logran la separación ideal de todos los puntos de la grilla.

3.6.1. Delay and sum

Los filtros del tipo *delay-and-sum* son populares por su baja complejidad computacional. Su funcionamiento se basa en la idea de que los ecos registrados por los distintos transductores debido al eco que proviene de un reflector estarán fuertemente correlacionados, y diferirán esencialmente en que la señal registrada por cada uno presentará un retardo diferente, que será proporcional a la distancia al reflector. Si consideramos la señal como proveniente de un único reflector ($R(\vec{r}^j) = \delta(\vec{r}^j - \vec{r}_1^j)$), el modelo dado por cualquiera de las ecuaciones 3.1 o 3.2, efectivamente la señal en cada canal será una versión filtrada de la misma señal, donde el filtro está dado por la función de propagación del medio, como muestra la ecuación 3.14.

$$e_i(f) = H_i(\vec{r}_1^j, f) \cdot T(\vec{r}_1^j, f) \quad (3.14)$$

Si la función de propagación en el medio puede tomarse según el principio de Huygens, la transferencia toma la forma dada por la Ecuación 2.10. En términos discretos, la misma se puede escribir como se muestra en la Ecuación 3.15, donde \vec{r}_i^j representa el vector posición de los distintos transductores. Bajo la aproximación de que el reflector a estimar se encuentre a una distancia mucho mayor a las distancias entre transductores ($|\vec{r}_1^j| \gg |\vec{r}_i^j - \vec{r}_j^j|, \forall i, j$), se puede hacer la reducción mostrada por la Ecuación 3.16, donde la diferencias entre las señales de los distintos transductores está dada únicamente por el retardo τ_i .

$$H_i(\vec{r}, f) = \frac{e^{-j2\pi \frac{f}{c} |\vec{r} - \vec{r}_i^j|}}{|\vec{r} - \vec{r}_i^j|} \quad (3.15)$$

$$H_i(\vec{r}, f) \approx \frac{e^{-j2\pi \frac{f}{c} |\vec{r} - \vec{r}_i^j|}}{|\vec{r}|} = A(\vec{r}) e^{-j2\pi f \tau_i(\vec{r})} \quad (3.16)$$

Mediante la elección de los elementos de q_{1l} de acuerdo con la ley $q_{1l} = e^{j2\pi f \tau_{1l}}$, es posible generar entonces estimadores de la función $T(\vec{r}_1^j)$, como se muestra en la Ecuación 3.17.

$$\hat{x}_1 = A(\vec{r}_1^j) \cdot T(\vec{r}_1^j) + q_{1l} v_l \approx T(\vec{r}_1^j) \quad (3.17)$$

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

Deben notarse sin embargo algunas limitaciones que presenta el método:

- Se realiza una estimación a menos de una ganancia $A(\vec{r})$ que depende de la distancia al reflector, que representa la atenuación de la señal en el camino y por lo tanto sobre-estima las reflectividades más cercanas y sub-estima a los reflectores lejanos. Esto puede corregirse mediante una ganancia adecuada a la salida del filtro.
- Se desprecia el término $q_{1l}v_l$, que representa la estimación debido al ruido proveniente de otros reflectores. La magnitud de este término estará dada por el producto interno entre la transferencia asociada a la posición de la reflectividad que se desea estimar y la transferencia asociada al (los) reflector(es) que genera(n) el ruido, que generalmente será no nulo.
- El método es completamente pasivo, pues estima la función T sin utilizar ninguna información sobre cómo se relaciona dicha función T con la reflectividad R (función de iluminación) en caso de que la hubiera.

3.6.2. Filtrado inverso

Una generalización del procedimiento anterior para el problema dado por la Ecuación 3.4 con cualquier función de propagación, está dada por la Ecuación 3.18. Este método busca aprovechar todo el conocimiento que se pueda tener del sistema, en términos de la transferencia del medio (sin realizar aproximaciones) y la función de iluminación, para estimar adecuadamente la reflectividad deseada. Toda esta información se encuentra sintetizada en la columna \vec{k}_1 de la matriz K_{11} (en el caso del sistema activo, aunque el resultado es aplicable también a un sistema pasivo), y la solución típica del sistema pasa por el filtrado inverso de la señal ($\vec{q}_1 = \frac{\vec{k}_1^*}{\|\vec{k}_1\|^2}$)¹³.

$$\hat{x}_1 = \vec{q}_1^T \cdot \vec{e} = x_1 + \frac{\vec{k}_1^T \cdot \vec{v}}{\|\vec{k}_1\|^2} \quad (3.18)$$

Este método cuenta con la ventaja de representar una solución local al problema sin la necesidad de realizar una aproximación de campo lejano. Aún más, no es necesario que la función de propagación en el medio sea la de Huygens, aunque sí es necesario que sea conocida para poder tener acceso a la forma de la matriz K_{11} . Adicionalmente, este resultado es aplicable a un sistema activo, es decir, si se cuenta con información de la función de iluminación, y por lo tanto K_{11} coincide con la discretización del problema dado por la Ecuación 3.1, se puede realizar una estimación de la reflectividad real en lugar de la aparente.

Las desventajas principales del método son dos. La primera es la común a todos los métodos locales: no existen garantías sobre los errores en la estimación

¹³En esta sección se utiliza notación vectorial en lugar de la notación tensorial con la convención de Einstein por motivos de visualización de las ecuaciones.

dados por los términos cruzados, que en general serán no nulos (la única situación en que la estimación es ideal es si se elige una grilla tal que las columnas de K_{l1} resultan ser ortogonales entre sí, pero la existencia de dicha grilla no está garantizada, y aunque existiese sería costosa de computar). Por otro lado, los métodos de filtrado inverso sufren de una amplificación del ruido¹⁴ que pudiera estar presente, reduciendo la relación señal a ruido del sistema. Este fenómeno es particularmente relevante cuando se trata de realizar una estimación de la reflectividad en regiones poco iluminadas del medio (y por lo tanto, donde la norma del filtro inverso es arbitrariamente grande).

Una potencial solución al segundo problema pasa por el uso de un filtro apareado en lugar de un filtro inverso, para mantener la potencia del ruido acotada. Dicho filtro toma la forma $\vec{q}_1 = \frac{k_1^*}{\|k_1\|}$, que garantiza la no amplificación de la señal en zonas poco iluminadas. Como contrapartida, la estimación pasa a tener un problema de ganancias, donde los reflectores cercanos son sobre-estimados respecto de los lejanos. Esto puede solucionarse mediante una ganancia adecuada a continuación del proceso de filtrado, que dependa de la transferencia del medio pero no de la función de iluminación para evitar las inestabilidades descritas anteriormente.

3.7. Estimadores globales

Una aproximación sustancialmente distinta al problema dado por la Ecuación 3.4 es el dado por los estimadores inversos en el sentido global. En la situación más común, el sistema descrito en la Ecuación 3.4 será un sistema de ecuaciones sobre-determinado (con más ecuaciones que incógnitas¹⁵). En estas condiciones el sistema no puede ser resuelto exactamente (sistema sobredeterminado de ecuaciones), por lo que la resolución pasa por la minimización en x_k de alguna función conveniente del vector $e_l - K_{lk}.x_k$. Típicamente se utiliza la norma cuadrática de dicho vector, dando lugar al conocido resultado de mínimos cuadrados (Ecuación 3.19).

$$\hat{x}_k = (K_{lk}^\dagger K_{lk})^{-1} K_{lk}^\dagger e_l \quad (3.19)$$

Donde $(K_{lk}^\dagger K_{lk})^{-1} K_{lk}^\dagger$ es la matriz pseudo-inversa de K_{lk} ¹⁶. El término K_{lk}^\dagger corresponde al operador de proyección del eco sobre la matriz de respuestas del

¹⁴Además del ruido determinístico asociado a la existencia de otros reflectores en el medio, debe considerarse que en una situación experimental existirá un ruido adicional en las medidas, de naturaleza estocástica, pero también con una componente determinística asociada a fenómenos no modelados del sistema, como ecos secundarios.

¹⁵La relación entre cantidad de ecuaciones y variables depende obviamente de la elección de la grilla de reflectividad. Elegir una grilla con más elementos que el $N \times M$ implica tener un sistema sub-determinado que no podrá resolverse mediante un estimador lineal sin agregar otro conocimiento *a priori* del mismo, lo que no ocurre generalmente. Por otro lado, la elección de un número total de elementos de la grilla menor reduce el tamaño del problema total y permite su resolución en el sentido de mínimos cuadrados.

¹⁶En el sentido de Moore-Penrose [1]. Para esto se asume la existencia de $(K_{lk}^\dagger K_{lk})^{-1}$, que requiere que K_{lk} sea de rango completo.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

sistema asociadas a la grilla elegida, y el término $(K_{lk}^\dagger K_{lk})^{-1}$ a la decorrelación de las distintas respuestas y ajuste de ganancias relativas entre las mismas. Esto implica que el uso del primer operador, corregido por ganancias, equivale a una estimación local de la incógnita, mientras que el segundo operador es el que da un valor agregado a este método respecto de los estimadores locales. Más allá de la interpretación de los operadores por separado, es importante notar la diferencia en costos computacionales asociados al cálculo y aplicación de cada uno.

3.7.1. Costo computacional

El primer operador tiene un costo de cálculo igual al de la matriz K_{lk} , que es equivalente a su tamaño $(O(M.N.Q))^{17}$. La aplicación del mismo tiene un costo $O(M.N.Q)$. El segundo operador tiene un costo de construcción $O(M.N.Q^2) + O(Q^3)$, y su aplicación $O(Q^2)$. Queda entonces de manifiesto que el segundo operador es computacionalmente más costoso. Debe notarse que el costo es importante no solo en términos relativos, sino también en absolutos. Por ejemplo, para generar una imagen de 32×256 ($Q = 8192$) de un área de $1 \times 4cm$ trabajando con frecuencias ultrasónicas centrales del entorno de los $10MHz$ ($f_s \approx 40MHz$, $T = 50\mu s$ y por lo tanto $N = 32$, $M = 2000$) el operador K tendrá aproximadamente 500 millones de elementos. Dados elementos complejos y utilizando punto flotante de 32 bits para la representación de las partes real e imaginaria, solamente guardar el operador en memoria requiere $4GB$.

Se deduce entonces que el uso directo del operador (pseudo-)inverso como plantea la ecuación 3.19 es intratable con recursos computacionales de escritorio, y deben buscarse alternativas para la resolución del problema para aproximarse a la solución sin necesidad de realizar este cálculo en forma explícita.

3.7.2. Condicionamiento

Sin perjuicio de cómo se realiza el cálculo, la calidad de la solución estará determinada por el condicionamiento del problema. Interesa entonces discutir brevemente los factores que afectan dicho condicionamiento y estudiar algunas estrategias de regularización.

La matriz K_{lk} que determina el problema activo, y en particular su condicionamiento, está determinada físicamente por 3 factores. La forma de la respuesta libre del medio $H(\vec{r}, \vec{r}', f)$, la elección de la grilla de discretización para la incógnita $X(\vec{r}, f)$ y los pulsos $P_i(f)$ elegidos para hacer la prospección del sistema. El primero de estos elementos, la respuesta $H(\vec{r}, \vec{r}', f)$, está dado por el medio que se desea estudiar y por lo tanto no es elegible a la hora de realizar la inversión

¹⁷Donde M es la cantidad de muestras de las señales adquiridas en el proceso (eco), N el número de transductores del sistema y Q el número de elementos de la grilla espacial sobre la que se trabaja.

del problema. En cambio, los otros dos elementos son en principio seleccionables por el experimentador, por lo que pueden tomarse de manera que el mismo quede mejor condicionado.

La elección de la grilla es posiblemente el elemento más importante a la hora de determinar el condicionamiento del problema. Por ejemplo, si se elige una grilla en donde la distancia entre puntos adyacentes es menor al límite clásico de difracción ($|d\vec{r}| < \frac{\lambda}{2}$) entonces las respuestas asociadas a dichos puntos (cada una representada por una columna de la matriz K_{lk}) serán casi idénticas y el problema estará muy mal condicionado. Aunque estrictamente la grilla puede ser seleccionable por el experimentador, el conjunto de las grillas que determinarán que el problema esté bien condicionado no lo es, y la elección se reduce a tomar la grilla más completa (o fina) que sea de interés, evitando aquellas que estén mal condicionadas por una cercanía innecesaria de los distintos puntos. Como regla general, el condicionamiento estará determinado por cuán parecidas sean las columnas de la matriz K_{lk} , que a su vez puede cuantificarse mediante el producto interno entre dichas columnas. El requerimiento para un buen condicionamiento es $\frac{\langle \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle}{|\vec{k}_1| \cdot |\vec{k}_2|} < \epsilon$, con ϵ una constante positiva estrictamente menor a 1.

Desde el punto de vista físico, los pulsos enviados tienen un efecto evidente en el condicionamiento del problema: si a cierta región del espacio llega muy poca o ninguna energía acústica, mal podría entonces generarse allí un eco perceptible por el sistema de sensado que permita determinar la existencia de reflectores en dicha región. En términos del modelo dado por la ecuación 3.1, la señal que llega a cierto punto del medio \vec{r} , está dada por el término $\sum_j H_j(\vec{r}, f) \cdot G_j(f)$, que de ser nulo impide cualquier tipo de estimación sobre $R(\vec{r}, f)$ ya que su naturaleza no se verá reflejada en los ecos registrados por los sensores. De la misma manera, aunque la energía enviada hacia cierta región no sea estrictamente nula, si ésta es demasiado baja, la estimación estará mal condicionada (la señal estará dominada por el ruido del sistema). La regla para un buen condicionamiento pasa por iluminar adecuadamente toda la región del medio que se desea explorar. Para regiones extendidas del medio, insonificar mediante una onda plana es lo adecuado. Si la zona es más reducida, pueden utilizarse señales que concentren su energía allí, siempre teniendo especial consideración de que la zona de concentración de la energía sea al menos de igual (o mayor) tamaño a la zona que se desea explorar.

La discusión sobre la insonificación adecuada del espacio implica no solamente al espacio físico, si no también al espacio de frecuencias. Cuando la reflectividad que se desea estimar tiene una dependencia frecuencial ($R(\vec{r}, f)$) es también importante que las señales utilizadas para la prospección sean ricas en componentes en la parte del espectro que sea de interés. En el caso de que la reflectividad no tenga una dependencia en la frecuencia, esta preocupación pasa a ser secundaria pero no completamente despreciable ya que a mayor porción del espectro utilizado, más información se tiene sobre el objetivo a explorar.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

Finalmente, la discusión sobre la insonificación debe considerarse desde el punto de vista de la máxima información que puede ser obtenida sobre el sistema. Si consideramos el sistema completo como una planta lineal e invariante en el tiempo a relevar, el experimento pulso-eco implica utilizar una única excitación para el sistema y medir las N_r salidas del mismo. Sin embargo, el sistema en el caso general cuenta con N_t entradas y relevar completamente la planta requeriría utilizar entonces N_t entradas linealmente independientes y medir las $N_r \times N_t$ salidas¹⁸. La base de señales utilizada típicamente para este relevamiento son deltas de Dirac desde cada uno de los transductores de emisión, que garantiza tanto la independencia lineal de las señales como la riqueza espectral de las mismas, aunque su estricta realización experimental es imposible. La estimación para este caso de múltiples entradas y salidas puede realizarse considerando los N_r experimentos pulso-eco por separado e integrando los resultados posteriormente, o considerando todos los experimentos como un único sistema de ecuaciones. En este último caso debe modificarse levemente el modelo dado por la ecuación 3.1 para realizar la estimación, pero en última instancia podrá expresarse en la forma dada por 3.4.

3.7.3. Regularización

En esta sección se discuten brevemente algunas estrategias de regularización para la resolución del problema dado por la ecuación 3.4, asumiendo que la matriz K_{lk} es conocida y por lo tanto su condicionamiento es un dato del problema. Cuando dicha matriz se encuentra mal condicionada o directamente su SVD contiene valores propios nulos, regularizar el problema puede ayudar a obtener una solución adecuada.

La primera estrategia de regularización pasa por eliminar la proyección de la solución sobre el espacio de vectores que corresponde a valores propios pequeños de la SVD de la matriz. Estos valores propios pequeños implican que dichos espacios se ven fuertemente amplificados al resolver el problema inverso y, aunque en ciertas circunstancias pueden tener relevancia en la solución, en general actúan como amplificadores del ruido en el sistema (espacios de baja relación señal a ruido) [1].

Una implementación de este procedimiento, conocida como regularización de Tikhonov, corresponde a corregir la solución al sistema dada por la ecuación 3.19, y utilizar en su lugar la ecuación 3.20. Existe en dicha solución un parámetro de regularización σ tal que, si un valor propio de la SVD es (mucho) menor a σ entonces el espacio vectorial asociado no se verá reflejado en la solución, mientras que si el valor propio es (mucho) mayor, el espacio vectorial asociado se reflejará en la solución tal como lo hubiera hecho si no se hubiera regularizado el problema [1].

¹⁸Se garantiza así el relevamiento completo del sistema, y deja de ser necesario predecir en qué zonas del medio se está concentrando la energía acústica. El condicionamiento de este problema está dado estrictamente por el medio y no es modificable por el experimentador.

$$\hat{r}_k = (K_{lk}^\dagger K_{lk} + \sigma^2 I)^{-1} K_{lk}^\dagger e_l \quad (3.20)$$

Esta solución se corresponde con la minimización del error cuadrático medio más un término correspondiente a la norma L_2 de la solución. En el caso más general, puede tomarse una norma $\|r_k\|_Q = r_k^\dagger \Lambda r_k$, donde la matriz Λ es autoadjunta (y por lo tanto definida positiva), como se muestra en la Ecuación 3.21. En este caso la regularización de Tikhonov asociada se obtiene sustituyendo la matriz Λ en el lugar de la matriz identidad en la Ecuación 3.20.

$$\hat{r}_k = \arg \min_{r_k} \{ \|e_l - K_{lk} r_k\|^2 + \sigma^2 \|r_k\|_\Lambda^2 \} \quad (3.21)$$

La forma más general de regularización puede verse en la Ecuación 3.22. En este caso se realiza también una minimización del error cuadrático de la solución, más un término de regularización dado por la función $\phi(r_k)$. Dicha función representa el costo de que la solución se aleje de alguna forma pre-establecida (información *a priori*). Para la resolución de este problema pueden utilizarse varias herramientas de optimización, algunas de las cuales se discuten en la próxima sección.

$$\hat{r}_k = \arg \min_{r_k} \{ \|e_l - K_{lk} r_k\|^2 + \phi(r_k) \} \quad (3.22)$$

3.7.4. Reducción del costo computacional

Como se establece en secciones anteriores, el costo computacional de realizar la inversión del problema (con o sin regularización) hace que en general el mismo sea intratable. Deben buscarse entonces estrategias para hallar o aproximarse a la solución cuyo costo sea menor.

Una primera posible estrategia pasa por el cálculo de la matriz pseudo-inversa de K_{lk} a partir de su descomposición. El cálculo de dicho operador mediante este procedimiento tiene un costo mucho menor al de calcular explícitamente el operador $K_{lk}^\dagger K_{lk}$ e invertirlo. Adicionalmente el trabajar con la SVD permite implementar la regularización de Tikhonov en el mismo procedimiento. Es necesario determinar previamente el parámetro de regularización σ apropiado para el problema.

Cualquier sistema de ecuaciones puede expresarse en la forma $f(x) = 0$. Como tal, las soluciones al mismo coinciden con las soluciones del problema de optimización $x = \arg \min_x \|f(x)\|^2$. La solución a este problema puede aproximarse en forma recursiva mediante el algoritmo de descenso por el gradiente¹⁹, cuya regla de actualización se muestra en la ecuación 3.23.

$$x_{n+1}^{\vec{}} = x_n^{\vec{}} - 2\gamma \nabla f^\dagger(x_n^{\vec{}}) \vec{f}(x_n^{\vec{}}) \quad (3.23)$$

¹⁹Dependiendo de la forma de la función, la búsqueda por gradiente conjugado puede resultar más eficiente. A los efectos de esta discusión, alcanza con mostrar que existen métodos computacionalmente menos costosos para aproximar la solución buscada.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

Si la función $f(x)$ es lineal en la variable x , como ocurre en el problema que queremos resolver, ($f(r_k) = e_l - K_{lk} \cdot r_k$), la regla de actualización tiene un costo computacional del orden del tamaño del operador K_{lk} (en el problema planteado, $O(M.N.Q)$), equivalente al costo de utilizar estimadores locales.

3.7.5. Descomposición en frecuencia

Una alternativa considerada para la resolución del problema inverso, fue la descomposición espectral del mismo. Dicha descomposición equivale a resolver por separado el problema monocromático planteado en la ecuación 3.9 para cada frecuencia presente en el pulso utilizado como excitación y luego sintetizar las soluciones de una manera apropiada. Esto permite reducir el sistema a M sistemas de ecuaciones de dimensiones $N \times Q$, lo que implica una reducción significativa de la complejidad computacional del algoritmo.

La motivación detrás de este enfoque radica en que cada frecuencia contiene información relativa a una longitud característica en el espacio de reflectividad (de acuerdo al límite de resolución que se deriva de la teoría de la difracción, para localizar un objeto de $1mm$ de tamaño, es necesario utilizar longitudes de onda menores o iguales a dicho tamaño).

A efectos de ilustrar la descomposición, se presenta un problema de estimación en el que se cuenta con información correspondiente a dos frecuencias distintas, pero la reflectividad a estimar no depende de la frecuencia, por lo que es la misma en ambos casos. Formulando como un único problema, el sistema está determinado por la ecuación 3.24, donde los vectores e_{f1} y e_{f2} corresponde a los ecos registrados para las frecuencias f_1 y f_2 respectivamente, las matrices K_{f1k} y K_{f2k} las transferencias asociadas a dichas frecuencias y x_k el vector de reflectividades incógnita.

$$\begin{pmatrix} e_{f1} \\ e_{f2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{f1k} \\ K_{f2k} \end{pmatrix} x_k \quad (3.24)$$

La solución (pseudo-)inversa total está dada por la ecuación 3.25. En dicha ecuación, los operadores que se aplican directamente sobre los vectores e_{f_i} son de cálculo sencillo y bajo costo computacional en su aplicación, pues implican la multiplicación de matrices y vectores de dimensión reducida. Sin embargo el operador inverso de decorrelación que debe utilizarse requiere del cómputo de dos matrices de dimensiones $P \times Q$ y la posterior inversión de su suma, lo que es computacionalmente costoso. En su lugar, se implementó la solución individual del problema inverso asociado a cada frecuencia, donde la solución para el caso de dos frecuencias total toma la forma de la ecuación 3.26.

$$\hat{x}_k = (K_{f1k}^\dagger K_{f1k} + K_{f2k}^\dagger K_{f2k})^{-1} (K_{f1k}^\dagger e_{f1} + K_{f2k}^\dagger e_{f2}) \quad (3.25)$$

$$\hat{x}_k = \frac{1}{2} ((K_{f1k}^\dagger K_{f1k})^{-1} K_{f1k}^\dagger e_{f1} + (K_{f2k}^\dagger K_{f2k})^{-1} K_{f2k}^\dagger e_{f2}) \quad (3.26)$$

3.8. Algunos resultados

La mayor ventaja de la solución del problema por frecuencia radica en que los operadores de la forma $(K_{fik}^\dagger K_{fik})^{-1} K_{fik}^\dagger$ son de fácil cálculo si se utiliza el cálculo del operador pseudo-inverso mediante la descomposición SVD. Debe notarse también que los problemas monocromáticos exigen una regularización adecuada pues el número de ecuaciones a resolver es igual a la cantidad de transductores del sistema N , mientras que el número de incógnitas coincide con el tamaño de la grilla $Q > N$.

3.7.6. Segmentación espacial

Aún con los métodos de pseudo-inversión y descomposición en frecuencia, muchos problemas, en especial aquellos que buscan realizar una imagen de una porción considerable del medio, continúan siendo intratables²⁰. Es necesario descomponer entonces el problema de generar una imagen de la reflectividad en múltiples imágenes de distintas zonas del medio.

En el caso extremo, la segmentación espacial implica resolver los puntos de la grilla elegida uno a uno, sin considerar la reflectividad del resto de los puntos. Esto es lo que hacen los estimadores locales y tiene los defectos presentados en la sección correspondiente. Por el lado opuesto, no realizar ninguna segmentación implica atacar el problema de la estimación en la forma dada por la Ecuación 3.5 lo que permite decorrelacionar completamente las estimaciones para cada uno de los puntos de la grilla, en función de lo calculado para los otros. Pero las correlaciones en la grilla tienen distancias características menores a su extensión total, siendo que puntos cercanos entre sí tendrán mayor correlación pues sus respuestas asociadas tendrán mayor parecido²¹. Tomando en consideración este hecho, es posible decir que si la segmentación del espacio no es demasiado fina (se resuelven en forma conjunta zonas más grandes que las distancias características) no hay existirá pérdida de información en la resolución del sistema.

3.8. Algunos resultados

Se presentan aquí algunos resultados obtenidos a partir de algoritmos implementados con los resultados desarrollados en este capítulo. En particular se contrastan dos implementaciones: la primera, un estimador local activo del tipo de filtro inverso; la segunda, un estimador global activo con segmentación espacial, descomposición espectral (e integración de los resultados monocromáticos para la obtención de un único resultado final), e inversión del problema mediante la matriz pseudo-inversa con regularización tipo Tikhonov.

²⁰A resolución espacial constante, tanto M como Q crecen linealmente con el tamaño del espacio que se desea explorar.

²¹el operador $K.K^\dagger$ tendrá la estructura de bandas característica de una matriz de correlaciones

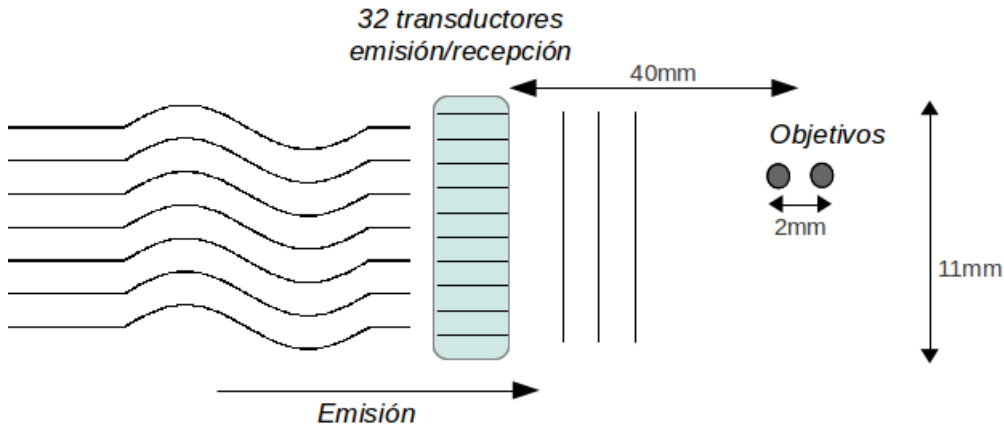


Figura 3.1: Esquema de la situación experimental de prueba para los algoritmos de ecografía.

3.8.1. Situación experimental

La situación experimental sobre la que se trabajó consistió en la emisión de una excitación sobre 32 transductores, y el registro del eco con los mismos 32 transductores. Se propone realizar una prospección de una sección bidimensional del medio en el que se encuentran inmersos los transductores, determinada por la dirección en la que se alinean los mismos, y la dirección normal a su superficie (*B-scan*). El medio se compone mayoritariamente de agua (homogéneo) y en él se encuentran presentes dos reflectores cilíndricos de cobre, dispuestos de forma transversal al plano de prospección, a una profundidad de aproximadamente $40mm$, y con una separación entre ambos de $2mm$ (Figura 3.1).

El conjunto de transductores utilizado está dispuesto en forma lineal, y cada uno de los transductores es rectangular, con un ancho individual de $\approx 0,3mm$ (en la dirección del array), para un tamaño total del array de $\approx 1cm$. La dimensión de los transductores en la dirección transversal al array es $\approx 5mm$.

El medio fue excitado con una onda plana pulsada, de frecuencia central $7,5MHz$ (longitud de onda $\lambda = 0,2mm$), de duración igual a un período de la frecuencia central (la señal emitida tiene entonces un ancho de banda de $\approx 15MHz$). La frecuencia de muestreo en transmisión y recepción fue de $80MHz$.

3.8.2. Estimador local

El estimador local implementado coincide con el filtro apareado descrito en la sección 3.6.2, donde la estimación es activa y se hace la corrección adecuada de ganancias para obtener una estimación equivalente para los reflectores independientemente de su distancia a los sensores.

3.8. Algunos resultados

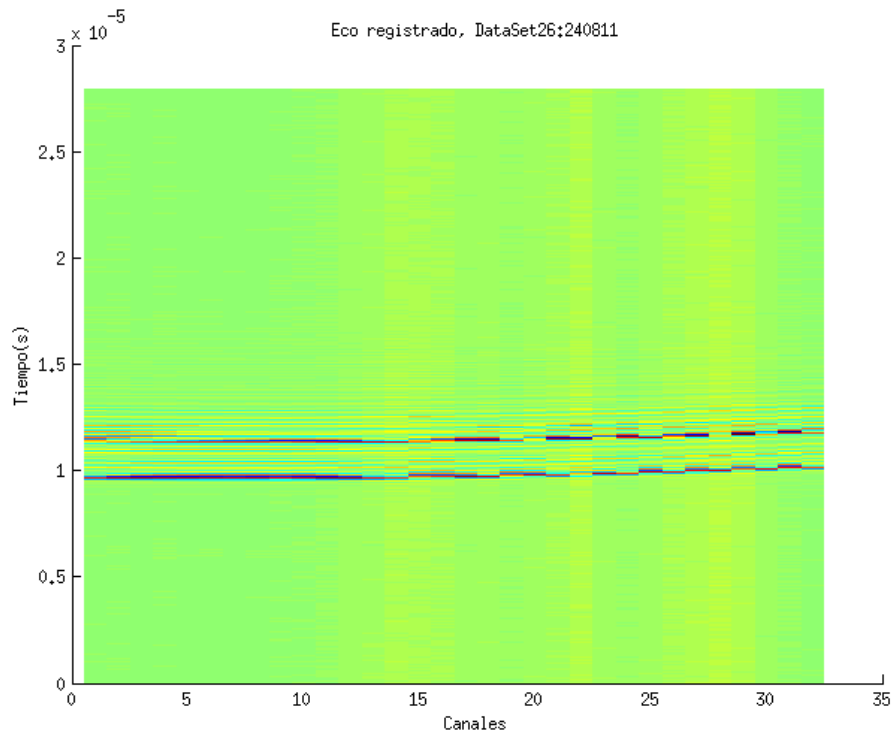


Figura 3.2: Eco

3.8.3. Estimador global

El estimador global implementado realiza una segmentación del espacio en bandas (16 para el ejemplo presentado), y realiza la (pseudo-)inversión del problema resultante para cada componente de la FFT , siendo el resultado presentado la sumatoria de los resultados para cada frecuencia. Se regulariza cada uno de los problemas inversos mediante una constante de regularización determinada en función del mayor valor propio del problema.

3.8.4. Resultados

Se presentan primero imágenes del eco registrado (figuras 3.2 y 3.3), y luego los resultados de los dos algoritmos utilizados para una inspección completa del plano de interés desde una profundidad de $10mm$ hasta $90mm$ (figuras 3.4 y 3.5), y luego resultados de ambos algoritmos para la zona entre $30mm$ y $50mm$ (figuras 3.6 y 3.7). En todos los casos se generaron imágenes de 512×64 píxeles (resolución en profundidad y lateral, respectivamente).

Como primer comentario, mediante inspección visual puede apreciarse que los resultados obtenidos mediante los distintos algoritmos son cualitativamente muy

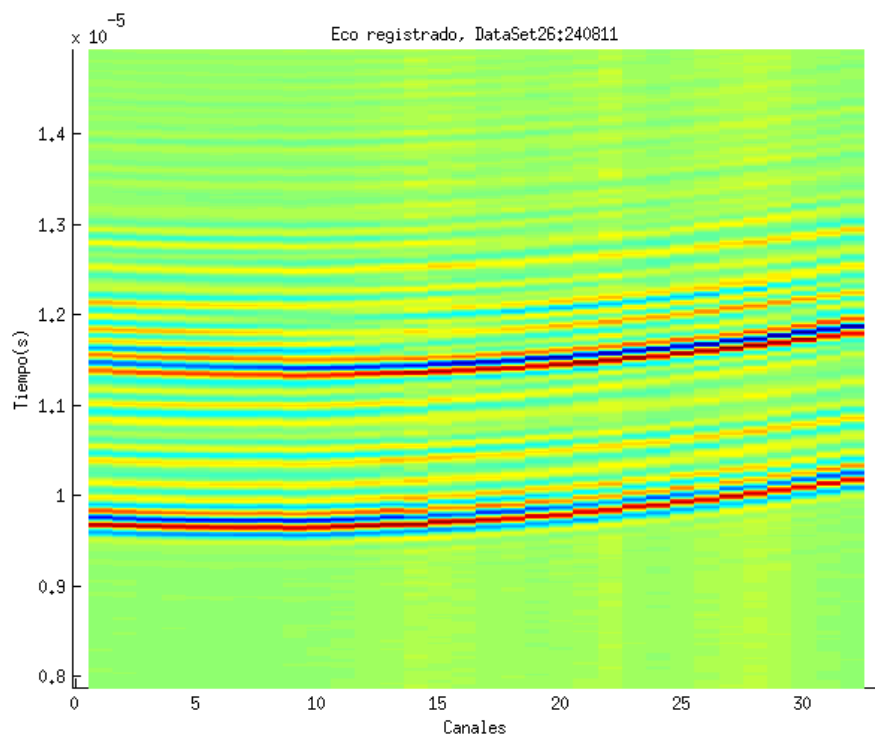


Figura 3.3: Eco con zoom

similares. Ambos muestran también una buena calidad en la medida que es fácil identificar las posiciones de los reflectores presentes en el medio. Puede notarse un mayor nivel de ruido, creciente con la profundidad, en la imágenes generadas mediante el estimador local. Esto es esperable, ya que dicho estimador no realiza una decorrelación, de manera que un reflector presente en cualquier parte del medio genera un cierto nivel de ruido en toda la imagen. También existe un mayor nivel de ruido en la zona cercana a los reflectores, lo que también puede justificarse por una falta de decorrelación entre fuentes en el algoritmo.

Para ambas imágenes parecería que existe una mayor capacidad de resolución lateral que en profundidad. Sin embargo el efecto es solo aparente, ya que el ancho lateral de los objetos reconstruïdos en las imágenes coinciden con el ancho de los objetos presentes en el medio ($1mm$). Estimar la extensión en profundidad de los objetos a partir de este experimento no es posible, por la oclusión de los objetos detrás de la superficie frontal de los mismos (tomando como referencia la dirección principal del conjunto de transductores utilizados) que genera los ecos de mayor amplitud. Para realizar estimaciones de estas dimensiones pueden utilizarse experimentos con más medidas, donde existan sensores orientados en múltiples direcciones respecto del objeto (o eventualmente trasladando un único sensor a su alrededor), aunque también existen técnicas que estiman las dimensiones de los

objetos mediante el estudio de los ecos secundarios generados por la propagación de ondas elásticas en los mismos [17].

En términos de complejidad computacional, ambos algoritmos son comparables. Para generar la imagen del medio entre 10 y 90mm de profundidad el tiempo de ejecución fue cercano al minuto²². Es necesario notar que el algoritmo de estimación local podría ser acelerado notablemente mediante una segmentación espacial como la realizada para el estimador global. La misma no fue implementada porque la complejidad computacional del algoritmo original permitía el tratamiento conjunto de todo el espacio y resultaba de más simple implementación.

Como comentario final, vale destacar que la mayor complejidad del estimador global parece casi no presentar ventajas respecto del estimador local, contrario a lo esperado. Una posible explicación para esto pasa por el proceso de regularización: si el parámetro de regularización es muy elevado, el operador de decorrelación (que representa la ventaja de los estimadores globales por sobre los locales) es asimilable a la identidad (a menos de una constante). No fue posible, durante las pruebas realizadas para este trabajo, encontrar una regularización que llevara a un estimador global con resultados distintos a los encontrados para el estimador local sin aumentar sustancialmente el ruido.

3.9. Conclusiones

Se estudiaron y caracterizaron algunos métodos de generación de imágenes de reflectividad de un medio a partir de ecos ultrasónicos. A partir de este estudio se implementaron varios algoritmos para la generación de imágenes a partir de datos obtenidos en experimentos de laboratorio, con resultados adecuados, algunos de los cuales se presentaron en las secciones anteriores.

Debe notarse que el objetivo principal del trabajo que se documenta en el presente capítulo fue familiarizarse con las técnicas básicas de imaginería ultrasónica, y no necesariamente profundizar en el estado actual del arte del tópico referido. Puede decirse entonces que fue posible cumplir con el objetivo propuesto.

²²No fue el objetivo de este trabajo lograr la generación de imágenes en tiempo real. Por lo tanto es posible que los algoritmos no sean eficientes en su cómputo y que los tiempos puedan reducirse significativamente.

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

Imagen de reflectividad, DataSet26

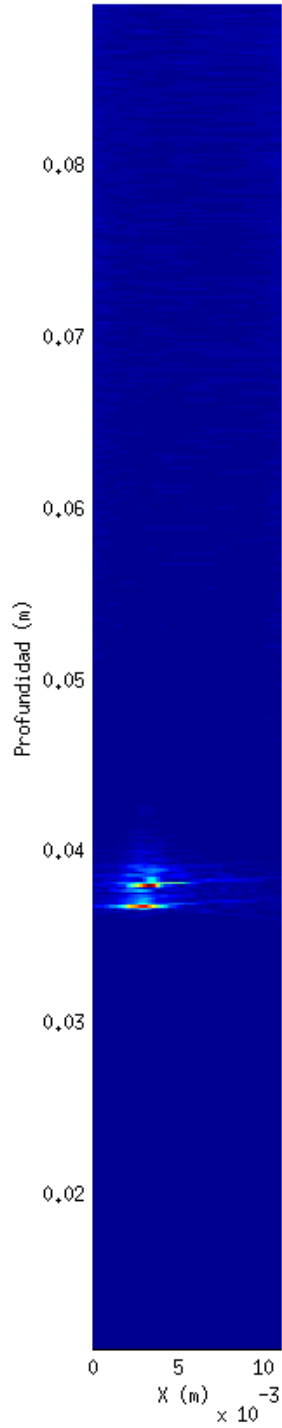


Figura 3.4: Estimación de reflectividades local, zona 10mm-90mm

Imagen de reflectividad, DataSet26

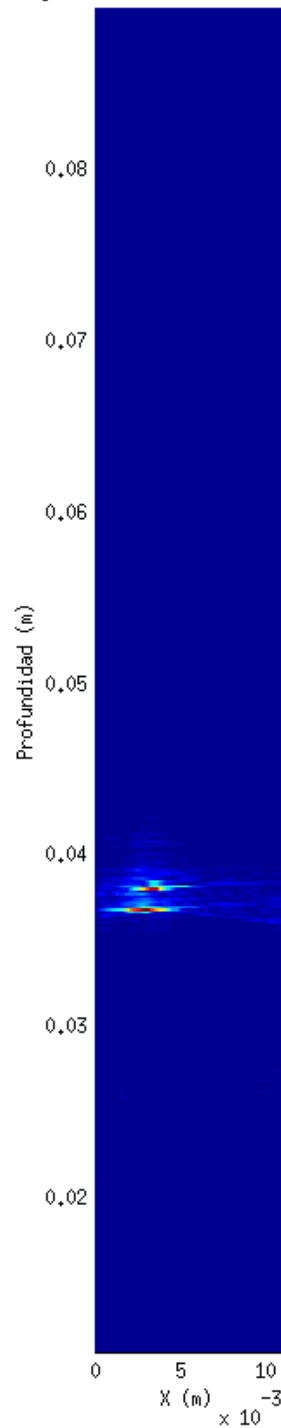


Figura 3.5: Estimación de reflectividades global, zona 10mm-90mm

3.9. Conclusiones

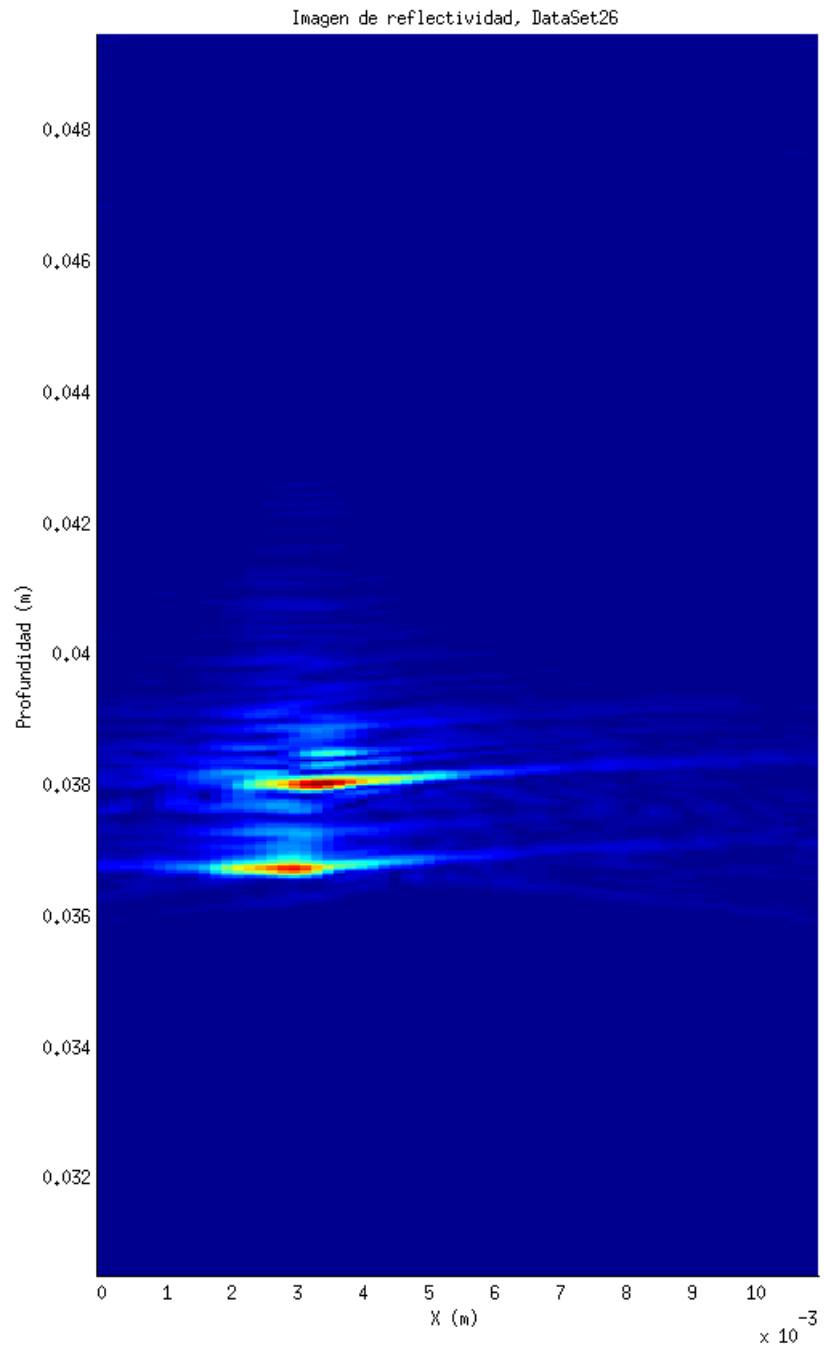


Figura 3.6: Estimación de reflectividades local, zona 30mm-50mm

Capítulo 3. Prospección en medios homogéneos: ecografía, radar y sonar

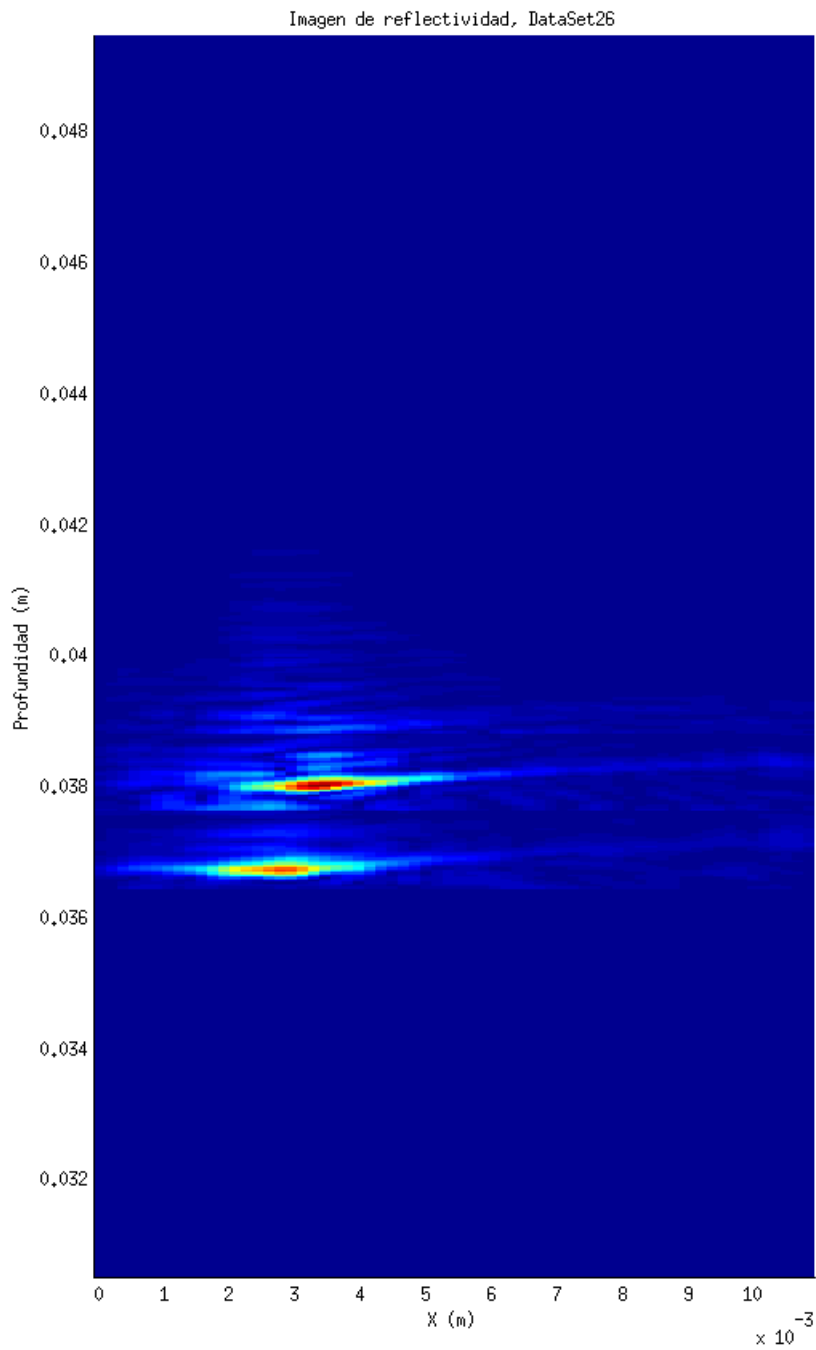


Figura 3.7: Estimación de reflectividades global, zona 30mm-50mm

Capítulo 4

Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

4.1. Inversión temporal

La inversión temporal es una conocida técnica de focalización de ondas en un medio cualquiera, que basa su funcionamiento en la invarianza ante inversiones temporales de la ecuación de onda [4]¹. Dicha invarianza establece, debido a que todos los términos de derivación temporal son de orden par, que si $f(x, t)$ es una solución de la ecuación entonces $f(x, -t)$ también debe serlo. Este resultado implica que por cada solución de la ecuación de ondas que sea divergente desde un punto (sea éste un emisor o reflector), existe otra solución en que dichas ondas convergen hacia dicho punto.

Utilizando los resultados del Apéndice A, es posible probar que toda la información referente a la propagación de una onda en un volumen cerrado puede registrarse mediante sensores adecuados en una superficie que encierre dichos sensores (Figura 4.1). Mediante el uso de emisores sobre la misma superficie que emitan una señal idéntica a la registrada pero temporalmente invertida, es posible probar que en el volumen considerado se propagará una solución de la ecuación de onda temporalmente invertida respecto de la propagada inicialmente (Figura 4.2).

Este resultado es de interés, pues sugiere un procedimiento para focalizar una onda sobre un reflector (asumido puntual) a partir del registro de una onda reflejada sobre dicho elemento siguiendo 3 pasos:

- Emitir una onda cualquiera.
- Registrar el eco (generado por el reflector sobre el que se desea focalizar) sobre una superficie que encierra un volumen que contiene al reflector de interés.

¹La validez de la ecuación está limitada a medios sin pérdidas (disipación), aunque muchos medios con baja atenuación pueden considerarse comprendidos en esta discusión.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

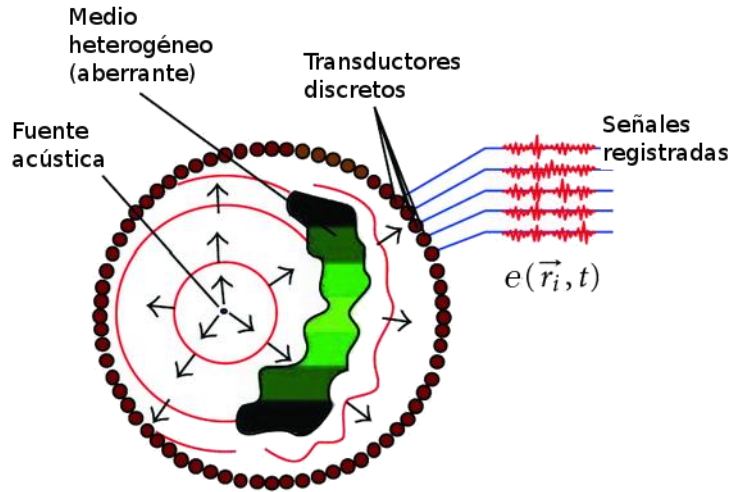


Figura 4.1: Propagación de una onda acústica hacia una superficie cerrada de transductores. Imagen adaptada de [11].

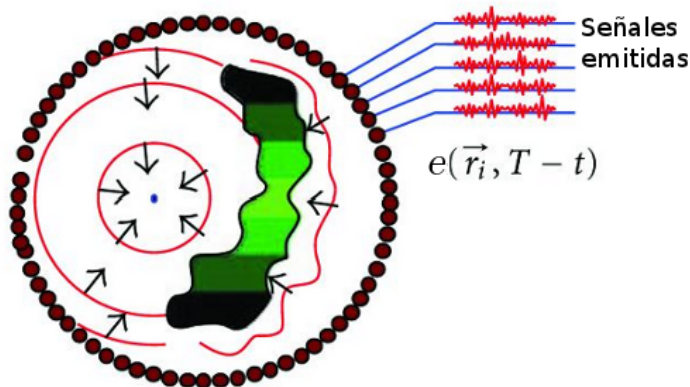


Figura 4.2: Retorno temporal de la onda generada mediante la emisión de las señales originales invertidas temporalmente. Imagen adaptada de [11]

- Invertir la señal registrada y re-emitirla sobre la misma superficie. La onda debería converger sobre el reflector.

Este procedimiento es conocido como una *Cavidad de inversión temporal* [4], y tiene el requerimiento adicional de que las funciones de transferencia asociadas a la emisión y recepción de señales tienen que ser idénticas, lo que puede asegurarse mediante el teorema de reciprocidad de antenas si se utilizan los mismos transductores para ambas tareas [23, 24].

En la práctica generalmente no es posible contar con una superficie de transducción que rodee el volumen de interés, y se utiliza una superficie de apertura limitada, lo que se denomina *Espejos de inversión temporal* [20, 24]. Los espejos

4.1. Inversión temporal

de inversión temporal obtienen la máxima focalización posible sobre un reflector dado (medida a través de la presión generada localmente), y equivalen a la implementación de un filtro apareado a la respuesta temporal asociada a dicho reflector.

Aunque los pasos a seguir son sencillos, la focalización anterior solo es posible en el caso de que exista un único reflector en el medio, lo que no es una situación muy común o relevante. En el caso de que existan múltiples reflectores una versión iterativa del mismo procedimiento puede utilizarse, logrando la misma capacidad de focalización para cada uno de los reflectores.

4.1.1. Inversión temporal iterada

Para ilustrar la versión iterada de la inversión temporal, es conveniente considerar una situación análoga a la anterior, pero en un medio que presenta dos reflectores. En dicho caso, el procedimiento anterior registrará el eco generado por ambos reflectores y por lo tanto la inversión temporal generaría dos ondas, cada una de las cuáles se focalizaría sobre uno de los reflectores. El problema con este funcionamiento es que en general se busca una focalización selectiva sobre uno de los reflectores (y no sobre todos los reflectores presentes en forma simultánea). Adicionalmente, no es posible saber qué porción de las señales registradas corresponden a las ondas provenientes de cada reflector, información que en general es útil si se desea realizar algún estudio sobre la naturaleza o posicionamiento de dichos reflectores.

Si en lugar de terminar el algoritmo en la etapa de re-emisión, se repitiera la etapa de registro del eco, se esperaría obtener nuevamente respuestas asociadas a cada uno de los reflectores, ya que las condiciones son las mismas de la emisión original (que utilizaba una forma de onda arbitraria). Sin embargo, es esperable que la respuesta asociada a cada reflector tenga una ganancia distinta en el proceso, dependiente de la reflectividad y distancia del elemento reflector respecto de los sensores [16]. En el ejemplo de dos reflectores, si la respuesta registrada originalmente estaba dada por la Ecuación 4.1, la respuesta esperada al cabo de la re-emisión y nuevo registro está dada por 4.2. Si continuáramos iterando este proceso, la respuesta registrada tomaría la forma dada por 4.3. Asumiendo que una de las ganancias es mayor que la otra $|\alpha| > |\beta|$, la única respuesta que se registraría al cabo de suficientes iteraciones sería la asociada al elemento con mayor ganancia [16, 24] (denominado reflector principal). La iteración del procedimiento permite entonces obtener el mismo resultado (conocer $y_1(\vec{r}, t)$) que se obtendría en el caso de que existiera únicamente el reflector principal del sistema.

$$y_0(\vec{r}, t) = y_a(\vec{r}, t) + y_b(\vec{r}, t) \quad (4.1)$$

$$y_1(\vec{r}, t) = \alpha y_a(\vec{r}, t) + \beta y_b(\vec{r}, t) \quad (4.2)$$

$$y_n(\vec{r}, t) = \alpha^n y_a(\vec{r}, t) + \beta^n y_b(\vec{r}, t) \quad (4.3)$$

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

Aunque no es parte del algoritmo clásico de inversión temporal, una vez conocida la respuesta asociada al reflector principal es posible, mediante un tratamiento adecuado de las señales para eliminar las componentes asociadas a dicho reflector, repetir el procedimiento para el segundo reflector más importante del sistema y así sucesivamente². El procedimiento sin embargo podría ser lento y computacionalmente costoso en caso de existir múltiples reflectores con ganancias similares entre sí, ya que la velocidad de convergencia del algoritmo depende fuertemente de la diferencia de ganancias entre los distintos reflectores $n \approx \frac{1}{\log(\alpha/\beta)}$ [19].

4.2. Fundamento teórico DORT

La técnica conocida como Descomposición del Operador de Retorno Temporal fue introducida por Prada et al. en 1996 [18] y generaliza el procedimiento de inversión temporal presentado anteriormente, así como establece un algoritmo para la determinación de la respuesta temporal de todos los reflectores presentes en el medio sin requerir iteraciones.

Esta técnica se basa en los resultados anteriores de inversión temporal. Según éstos, el procedimiento de inversión, re-emisión y registro de ecos es un operador lineal cuyos vectores propios contienen a las respuestas asociadas a los reflectores presentes en el medio. DORT ofrece un método directo para obtener dichos vectores propios y los valores propios asociados, sin la necesidad de recurrir a una iteración.

Para la deducción que sigue, se asume un sistema de prospección ultrasónico donde la emisión y recepción de las ondas se realiza desde un único array de transductores³. Por simplicidad se realiza la deducción para el caso monocromático, a una frecuencia dada f que se omitirá en las ecuaciones. La generalización para la utilización de pulsos no monocromáticos se realiza en una sección posterior. En las circunstancias descritas, el sistema de ultrasonido puede modelarse según la ecuación 4.4. P representa el vector de entradas (excitación) al sistema a la frecuencia dada, con un número de elementos N correspondiente a la cantidad de transductores del array. K es la matriz de transferencia asociada al sistema lineal ($N \times N$) y E_o el vector de respuestas registrado a la misma frecuencia f , que también tendrá N elementos.

$$E_o = K.P \quad (4.4)$$

²Estrictamente esto es posible sólo si los reflectores tienen respuestas asociadas que son ortogonales entre sí. Si no fuera el caso, iterativamente puede conseguirse aislar la componente de la respuesta asociada al segundo reflector que sea ortogonal a la respuesta del primer reflector. Esto implica que se pueden lograr buenas aproximaciones de la respuesta del segundo reflector, mientras la proyección de una señal sobre la otra contenga solamente una pequeña fracción de la energía de la señal original.

³Este no tiene por qué ser el caso. El método DORT es extensible a sistemas donde el array de emisión y el de recepción son distintos [16].

4.2. Fundamento teórico DORT

El procedimiento de inversión temporal requiere tomar la respuesta registrada E_o , invertirla temporalmente y re-emitirla para nuevamente registrar la respuesta. Dado que la operación de inversión temporal se traduce al espacio de frecuencias como una conjugación, la respuesta obtenida en esta etapa puede calcularse de acuerdo a la ecuación 4.5.

$$E_1 = K.E_o^* = K.C(E_o) \quad (4.5)$$

Se deduce de aquí que el operador de la inversión temporal es un operador conjugación $C(\cdot)$, seguido de la matriz asociada al proceso de propagación K . Se deduce también que para que el proceso de inversión temporal iterado funcione adecuadamente, las respuestas asociadas a cada uno de los reflectores del medio tienen que ser vectores propios de dicho operador. Es posible probar también que los vectores propios del operador coinciden con los del denominado operador de retorno temporal $K.K^\dagger$ ⁴. La ventaja de este operador es que toma una forma matricial, por lo que el cálculo de vectores y valores propios puede realizarse numéricamente en forma simple.

El resultado anterior permite decir que a partir del conocimiento del operador K es posible la identificación de la respuesta asociada a los reflectores del sistema (siempre supuestos puntuales) y por lo tanto la focalización sobre los mismos mediante una excitación adecuada del sistema. Es importante resaltar las hipótesis utilizadas para esta deducción, que son:

- Los reflectores son puntuales.
- Los reflectores son idealmente resueltos por el sistema (respuestas ortogonales entre sí).
- Existe un número finito de reflectores D , que debe ser menor al número de transductores utilizados N (de otra manera no puede sostenerse la condición de ortogonalidad).

4.2.1. Comparación contra la inversión temporal iterada

Tanto el método DORT como la inversión temporal iterada permiten encontrar la respuesta asociada a reflectores puntuales presentes en el medio. Ambos métodos tienen las mismas limitaciones asociadas al número de reflectores que es posible resolver y los problemas que surgen en el caso de que las respuestas asociadas a los mismos no sean ortogonales entre sí. Sin embargo los mecanismos de obtención de dichas respuestas son bastante distintos y presentan distintas complejidades desde el punto de vista experimental, que conviene estudiar.

Por un lado, la inversión temporal iterada requiere, valga la redundancia, una iteración para determinar la respuesta de cada reflector. El número de iteraciones

⁴En el Apéndice B se presenta una prueba de ambos resultados.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

necesarias para la adecuada determinación de las respuestas depende del módulo relativo de los valores propios asociados con cada uno de los reflectores. En el caso de tener reflectores con valores propios de módulos similares, la convergencia puede ser muy lenta.

Por otro lado, DORT solamente requiere de conocer el operador K . Para relevar completamente K es necesario contar con datos experimentales de N parejas excitación-respuesta (donde las excitaciones sean linealmente independientes entre sí), donde N es el número de transductores utilizados⁵. En el caso más simple, las N excitaciones serán señales que utilizan, cada una, un único transductor, donde la i -ésima respuesta obtenida será directamente la i -ésima columna del operador K . Incluso si el número de reflectores presentes en el medio es $D < N$, alcanza con conocer D parejas excitación-respuesta linealmente independientes⁶.

4.3. Implementación

Para la implementación del método DORT se asume que se cuenta con N parejas excitación-respuesta a una frecuencia dada. A cada pareja corresponde un vector de excitación p_i y uno de respuesta e_i , que pueden disponerse como dos matrices $P = p_i$ y $E = e_i$ de dimensiones $N \times N$, siendo cada columna de las mismas uno de estos vectores. El operador K puede despejarse entonces según la Ecuación 4.6.

$$K = E.P^{-1} \quad (4.6)$$

Donde E es invertible ya que el conjunto de las excitaciones utilizadas debe ser linealmente independiente. Si todo funciona como corresponde, la matriz K hallada es simétrica y esta simetría es la que determina muchas de las propiedades estudiadas del operador $K.K^\dagger$. Este no es exactamente el caso cuando se trabaja con datos reales que presentan ruido, por lo que se es usual quedarse con la parte simétrica de la matriz $\text{sym}(K) = \frac{K+K^T}{2}$. Con el operador K se procede a calcular los valores y vectores propios de $K.K^\dagger$.

En el caso de que se tengan D parejas de datos, con $D < N$, el operador K puede estimarse en dos pasos. Primero se calcula $K_D = E.P^{-1}$, donde se utiliza la matriz pseudo-inversa de P ya que la misma no es cuadrada. El cálculo mediante la pseudo-inversa permite realizar en el mismo paso la necesaria regularización, ya que el $\text{rank}(P) \leq D < N$. La matriz K_D contiene entonces la información sobre los

⁵Para el caso en que el número de transductores utilizados para la excitación sea distinto de los utilizados para registrar la respuesta, es necesario conocer el mínimo entre estos dos valores

⁶Estrictamente, es necesario que las excitaciones tengan también proyecciones linealmente independientes sobre la imagen de K (espacio no nulo). Sin conocer el operador K no es posible asegurar esto, sin embargo que no ocurra para señales arbitrariamente elegidas es un evento improbable.

4.4. Análisis de valores y vectores propios

vectores propios asociados a valores propios no nulos (vectores que se presentan en la matriz de ecos E). Sin embargo, la matriz K_D resulta no ser simétrica. A efectos de encontrar una matriz simétrica K que tenga los mismos valores propios no nulos (y vectores propios asociados) que K_D , puede realizarse una descomposición SVD de acuerdo a la Ecuación 4.7, y luego una síntesis de acuerdo a la Ecuación 4.8.

$$U.D.V^\dagger = K_D \quad (4.7)$$

$$K = U.D.U^\dagger \quad (4.8)$$

Debe notarse que en el caso anterior, salvando la posibilidad de que la matriz P contenga al menos $N - D + 1$ columnas que son combinaciones lineales de vectores propios asociados a valores propios nulos del operador K^7 , ninguna información se pierde, ya que el rango de K es igual al número de reflectores puntuales en el medio [16] (se excitan todos los modos no nulos del sistema). Lamentablemente no es posible saber de antemano si dicha condición se cumple, aunque es posible establecer que si los pulsos de excitación del sistema son elegidos en forma aleatoria, este es un suceso improbable.

4.3.1. Determinación del número de reflectores relevantes

En el caso general, el número de reflectores presentes en el medio es desconocido. Eso implica que el número de valores propios no nulos es a priori desconocido. Idealmente los valores propios no nulos son fácilmente distinguibles de los nulos, pero ese puede no ser el caso en presencia de ruido y reflectores muy lejanos (atenuados). Es necesario entonces establecer una regla que permita separar los valores propios que deberían ser nulos pero no lo son debido al ruido o errores de cálculo y los que responden a la presencia de reflectores. Una posible regla automática para la discriminación es buscar el mayor salto entre las magnitudes logarítmicas de los valores propios, como se muestra en la Figura 4.11 asociada a la aplicación descrita en la Sección 4.6.

4.4. Análisis de valores y vectores propios

Los valores propios obtenidos mediante DORT representan en su módulo una ganancia para el proceso de envío-recepción de la respuesta asociada (en general la atenuación asociada a la propagación) y una fase, que se relaciona con el retardo τ_i asociado a la propagación de la misma ($\lambda_i(f) = b_i(f).e^{j\varphi_i(f)}$ [16]).

⁷Esto implica que los pulsos elegidos para la excitación no envían nada de energía acústica sobre los reflectores presentes en el medio.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

Aunque para una única frecuencia (contexto en el que se deriva el método DORT original) dicho retardo no contiene información relevante, si consideramos la función $\varphi_i(f)$, la misma se relaciona con el tiempo de vuelo de la señal (propagación ida y vuelta) en la forma $\varphi_i(f) = 2\pi f\tau_i$. Por lo tanto a partir de los valores propios es posible estimar el valor de τ_i . Una forma posible de estimación (que coincide con el MLE de τ_i bajo la hipótesis de ruido blanco gaussiano [9, 21]) es obteniendo el máximo de la transformada de Fourier de $e^{j\varphi_i(f)}$ que es fácilmente calculable a partir de $\lambda_i(f)$ ⁸.

Los vectores propios $\vec{v}_i(f)$ representan, para cada frecuencia, una relación relativa de fases y ganancias entre las señales que se deben emitir, de manera que el eco registrado coincida con la señal emitida a menos de una inversión temporal (conjugación). Dada la linealidad del sistema, puede establecerse que para una señal temporal sintetizada según la Ecuación 4.9 (donde $a(f)$ es una función de *pulse shaping* arbitrariamente elegida) generará una respuesta del medio en la forma dada por la Ecuación 4.10, lo que equivale a establecer que la señal es filtrada por el medio, y la transferencia de dicho filtro corresponde a la función $\lambda_i(f)$. Estas señales son invariantes en el sentido de que las señales correspondientes a todos los canales (transductores) sufren el mismo proceso de filtrado.

$$\vec{h}_i(t) = \int a(f)\vec{v}_i(f)e^{-j2\pi ft}df \quad (4.9)$$

$$\vec{g}_i(t) = \int \lambda_i(f)a(f)\vec{v}_i(f)e^{-j2\pi ft}df \quad (4.10)$$

En un medio real, la magnitud de los valores propios dependerá de la atenuación del medio a la frecuencia dada, por lo que si consideramos la síntesis de señales $\vec{h}_i(t)$, las señales de eco serán versiones deformadas de la misma. En un medio ideal (pasabanda en el soporte espectral de la señal utilizada, y con reflectividad que no depende de la frecuencia) dicha deformación no existirá y la señal $\vec{h}_i(t)$ será invariante ante el proceso de retorno temporal.

4.5. Simulador de ecos

Debido a los problemas encontrados con el equipo de adquisición, no fue posible adquirir los datos necesarios para la validación de los algoritmos programados en esta etapa del trabajo. A efectos de subsanar esta carencia, se implementó un simulador básico de ecos de acuerdo al modelo desarrollado en el Capítulo 2.

⁸Estrictamente esta estimación obtiene el tiempo de vuelo mínimo. Cada transductor se encuentra a una distancia diferente de un reflector puntual dado y por lo tanto el tiempo de vuelo es distinto en cada uno. Puede probarse que el tiempo asociado a la fase del valor propio se corresponde con el tiempo de vuelo desde el transductor más cercano al reflector. En caso de que la distancia al reflector sea sensiblemente mayor al tamaño del array, las diferencias entre estos tiempos son despreciables.

4.6. Aplicación: determinación de la posición de los reflectores en un medio homogéneo

El simulador propaga ondas acústicas mediante la aproximación de Huygens, asume que los reflectores son puntuales (aunque reflectores extendidos pueden simularse como una superposición de reflectores puntuales) con reflectividades que son independientes de la frecuencia de excitación, y utiliza la aproximación de Born de *scattering* simple⁹. La simulación no considera la transducción de señales acústicas y eléctricas, lo que corresponde a utilizar transductores ideales (de dimensiones infinitesimales y con una transferencia unitaria tanto para la transmisión como la recepción).

El algoritmo de simulación fue programado de forma que fuera intercambiable con el algoritmo de adquisición utilizado con el equipo disponible, de manera de que todos los programas de procesamiento pudieran trabajar en forma indistinta con ambos. A los mismos efectos, el formato de salida del algoritmo de simulación coincide con el devuelto por el equipo de adquisición.

A modo de validación se estudiaron los ecos simulados y se utilizaron como entrada para los algoritmos de generación de imágenes descritos en el Capítulo 3. Se presentan como ejemplo las porciones relevantes del eco generado para la aplicación descrita en la Sección 4.6 y la imagen de reflectividad obtenida a partir del mismo (Figura 4.3). Una descripción esquemática de la situación simulada puede encontrarse en la Figura 4.4. Como puede observarse de la imagen de reflectividad generada, el eco simulado presenta las mismas propiedades básicas que los ecos obtenidos en situaciones experimentales reales, permitiendo la ubicación de los reflectores mediante una simple inspección visual. Como también era de esperarse debido a la ausencia de ruido, dicha imagen de reflectividad es más limpia y la localización de los reflectores tiene una menor incertidumbre.

4.6. Aplicación: determinación de la posición de los reflectores en un medio homogéneo

Para el siguiente ejemplo se generaron 32 parejas de pulsos y ecos asociados. Mediante el simulador de ecos referido en la sección 4.5.

Dado que la simulación asume que el medio es homogéneo ideal (que cumple con el principio de Huygens), se cumple que la magnitud de los valores propios no debería variar con la frecuencia (todas las frecuencias se atenúan en igual forma), y la fase de los mismos debería ser lineal. En tal caso existen señales temporales $\vec{h}_i(t)$ que son invariantes en el proceso de retorno temporal.

Se propone entonces determinar la existencia de hasta N reflectores puntuales en el medio a través de DORT y obtener la respuesta temporal asociada a cada

⁹Por más información sobre estas aproximaciones, referirse al Capítulo 2.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

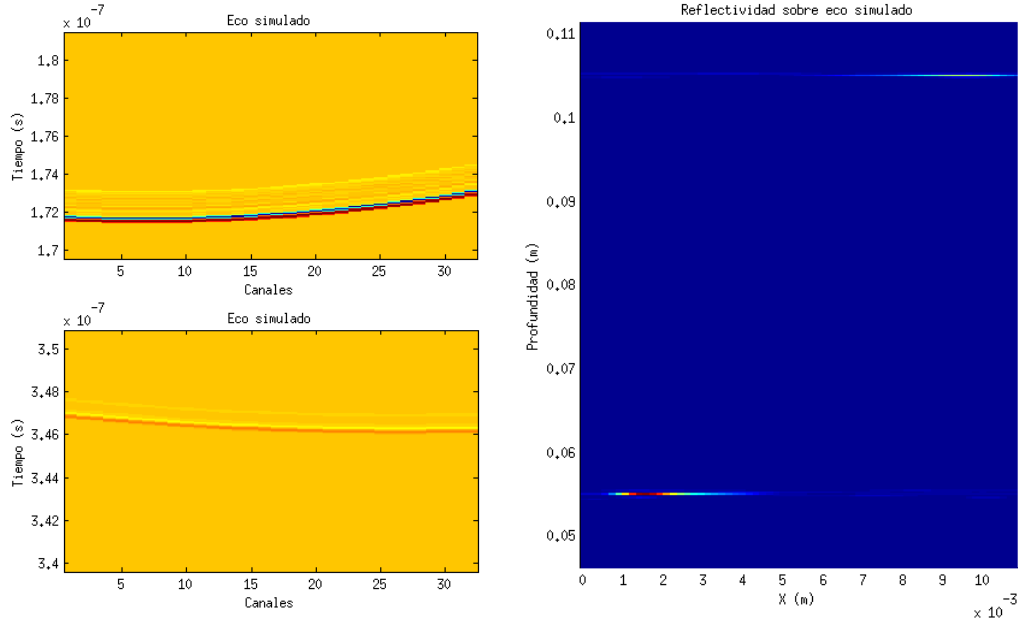


Figura 4.3: Porciones del eco simulado e imagen de reflectividad generada a partir del mismo para la aplicación desarrollada en la Sección 4.6.

uno de éstos $\vec{h}_i(t)$ junto con la sucesión de valores propios asociada a cada reflector en función de la frecuencia $\lambda_i(f)$.

En forma adicional, a partir de las respuestas $\vec{h}_i(t)$ es posible utilizar los procedimientos de *beamforming* descritos en el Capítulo 3 para estimar la posición del reflector en el caso de un medio conocido. En este caso solo es necesario utilizar alguna técnica de *beamforming* pasivo ya que la distancia al reflector se calcula a partir del retardo τ_i . Adicionalmente, utilizar un algoritmo de *beamforming* activo sería contraproducente, ya que la señal a tratar es, en teoría, aquella que converge puntualmente a un reflector en el medio enviando energía nula al resto. Esto implica que el problema inverso está muy mal condicionado y no existe información obtenible sobre la reflectividad en el resto del medio.

Debido a que el eco es simulado, puede asegurarse que el medio es ideal (pasa-banda) y por lo tanto puede hacerse la reconstrucción temporal descrita anteriormente. En un caso real esto no es posible, y es necesario limitarse a trabajar con la versión monocromática del algoritmo¹⁰.

¹⁰Ver próxima sección.

4.6. Aplicación: determinación de la posición de los reflectores en un medio homogéneo

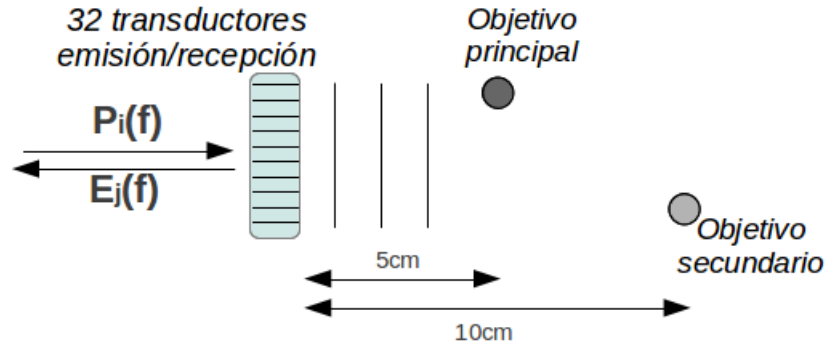


Figura 4.4: Situación experimental simulada (Sección 4.6).

4.6.1. Situación experimental

Se trabajó sobre 32 transductores (se utilizó un único array para la emisión y recepción) a efectos de relevar la matriz de transferencia monocromática $K(f)$ invirtiendo la Ecuación 4.4. El eco generado corresponde a un medio homogéneo con 2 reflectores, uno principal localizado en $\vec{x}_1 = (0,002; 0,05)m$ y reflectividad 1 (refleja toda la energía que recibe), y otro secundario localizado en $\vec{x}_2 = (0,009; 0,10)m$ con una reflectividad de 0,5 (la amplitud reflejada es el 50% de la amplitud incidente), con los ejes de coordenadas coincidiendo con los ejes principales del array, y el origen de coordenadas en uno de los extremos del array. En la Figura 4.4 se muestra un diagrama de dicha situación experimental.

Aplicando el algoritmo que implementa el método DORT, se obtuvieron los vectores y valores propios del operador de retorno temporal $K^\dagger K(f)$ y mediante una síntesis en frecuencia, se obtuvieron señales invariantes en el tiempo. Ordenados por magnitud de los valores propios, los 3 primeros vectores se pueden ver en las Figuras 4.6, 4.8 y 4.10 y la magnitud y fase de los vectores propios asociados en las Figuras 4.5, 4.7 y 4.9.

Es notable que los primeros dos vectores propios son significativamente mayores en magnitud al tercero, lo que coincide con lo esperado según la teoría, dada la existencia de únicamente dos reflectores en el medio. El tercer vector corresponde a ruido como puede verse, y el valor propio asociado se encuentra en la magnitud esperada asociada con el ruido en las operaciones de cálculo. La Figura 4.11 muestra la magnitud de todos los valores propios hallados para la frecuencia central del pulso utilizado como excitación ($f = 7,5MHz$), junto con el umbral de corte que se deduce de la regla propuesta en la Sección 4.3.1. Para los vectores propios asociados a los reflectores, el tiempo de vuelo fue estimado con un error menor al 1% mediante el procedimiento descrito anteriormente. A su vez, fue posible detectar automáticamente la presencia de 2 reflectores y, mediante *beamforming* pasivo, fue posible ubicar dichos reflectores con una precisión cercana al límite de difracción clásico ($\lambda/2$) en la coordenada x (lateral), aunque con resultados no tan buenos

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

para la coordenada z (profundidad). Los resultados parecen mostrar un error sistemático en la estimación de la profundidad (siempre se subestima la profundidad en una cantidad proporcional a la profundidad real). Una mejor estimación de la distancia surge mediante el tiempo de vuelo y permite corregir este error.

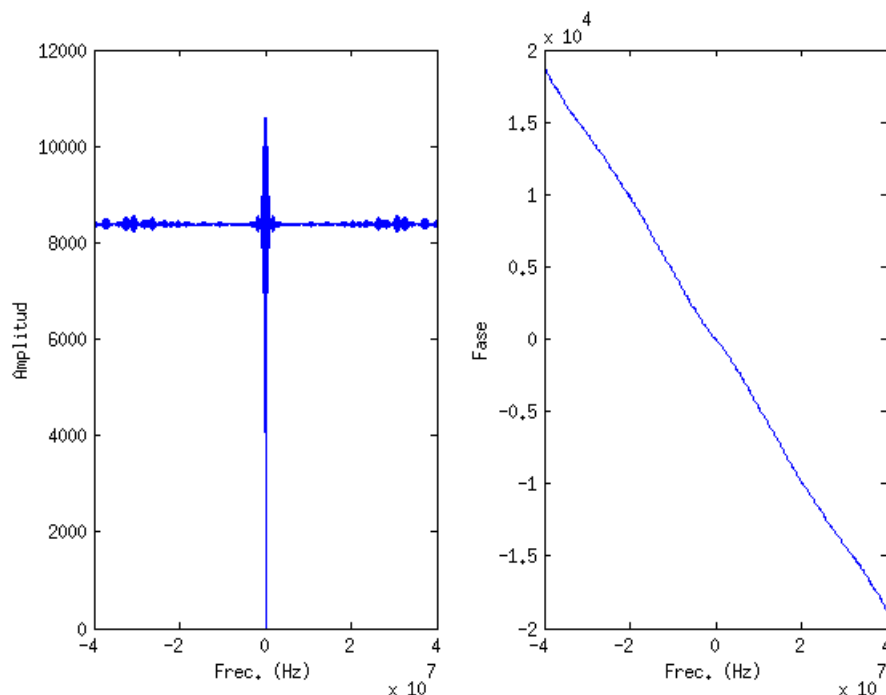


Figura 4.5: Valores propios asociados al 1er vector propio en DORT.

4.7. Aplicación: DORT en un medio real, detección y localización de reflectores

En este ejemplo se propone estudiar los resultados del método DORT aplicado a datos reales. Debe advertirse que los datos con los que se trabajó presentan ciertos defectos:

- No se cuenta con más que 5 parejas de excitación-respuesta para una situación experimental dada. Dado que se trabajó con 32 transductores, la matriz K que se busca relevar es 32×32 , por lo que el sistema no se encuentra completamente determinado.
- La calidad de los datos es pobre. Por problemas con el equipo de adquisición, los distintos canales tienen ganancias dispares.

El primero de estos problemas puede subsanarse si se está trabajando en un medio en el que se espera que el número de valores propios no nulos (cantidad de

4.7. Aplicación: DORT en un medio real, detección y localización de reflectores

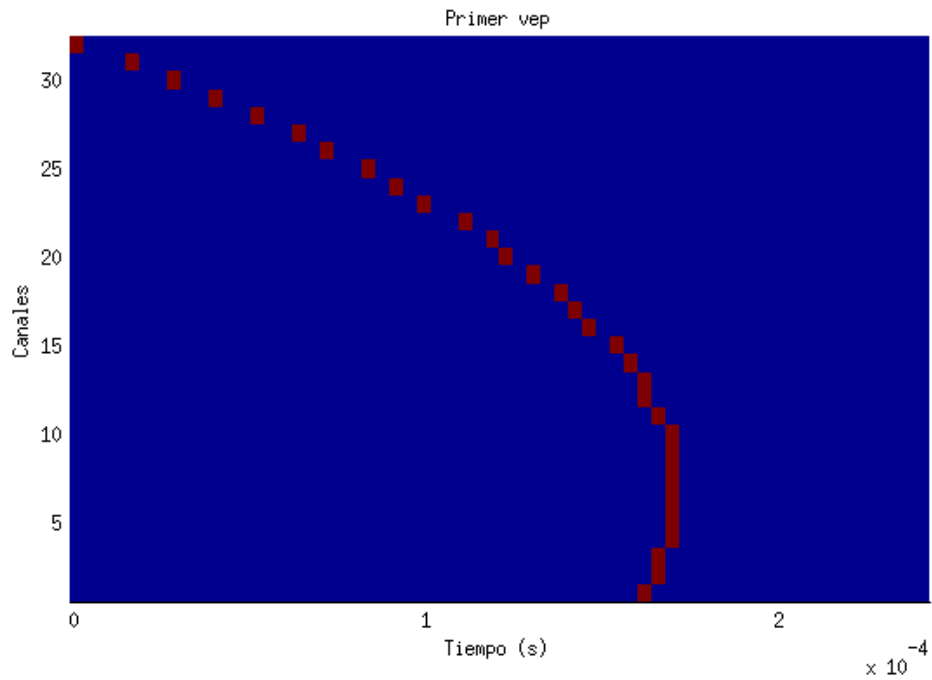


Figura 4.6: Vector propio con mayor valor propio, sintetizado.

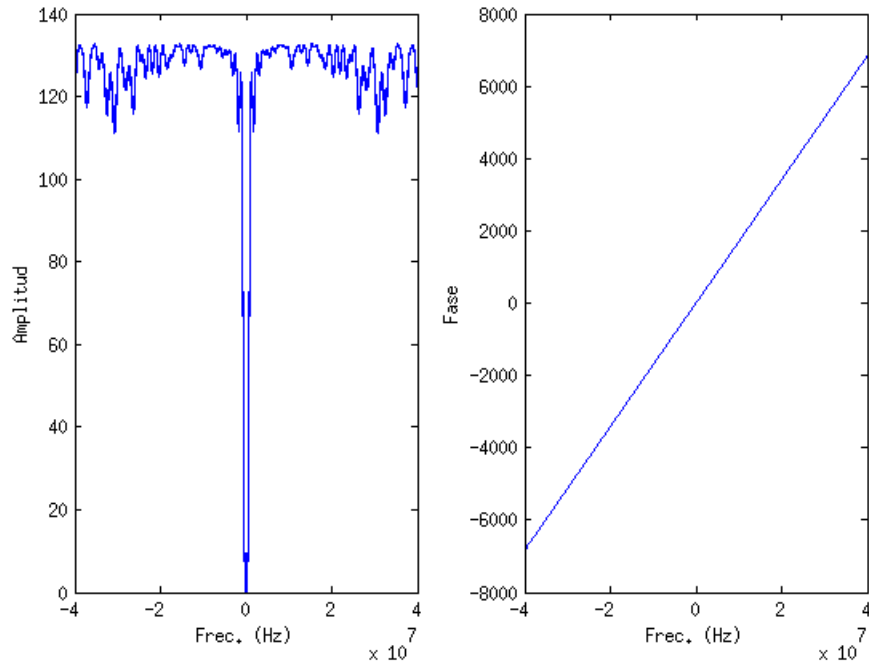


Figura 4.7: Valores propios asociados al segundo vector propio en DORT.

reflectores) sea menor o igual a la cantidad de parejas de señales que se tiene. Este

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

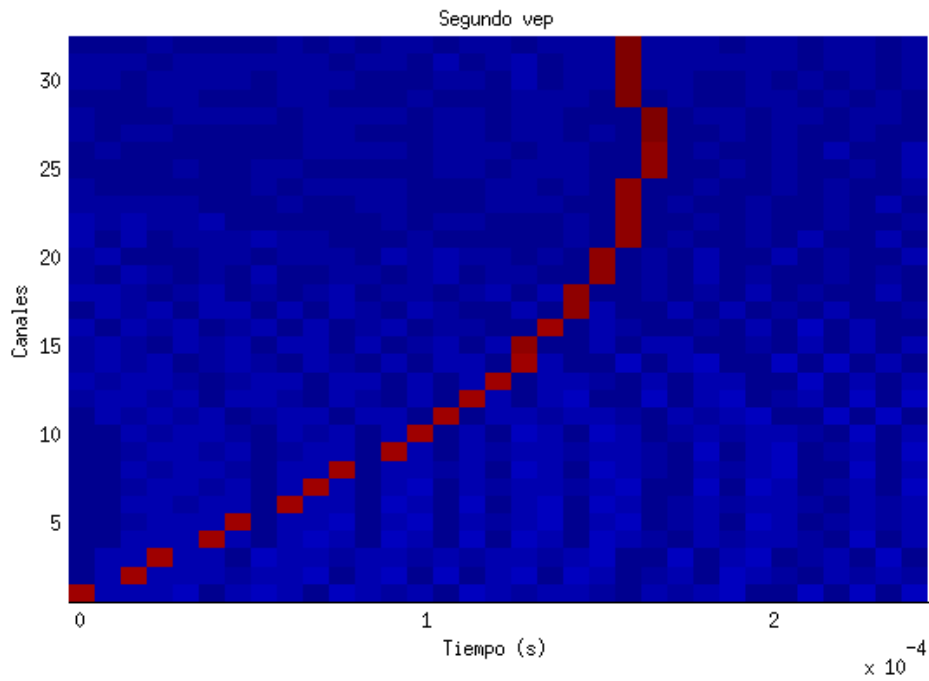


Figura 4.8: Vector propio con segundo mayor valor propio, sintetizado.

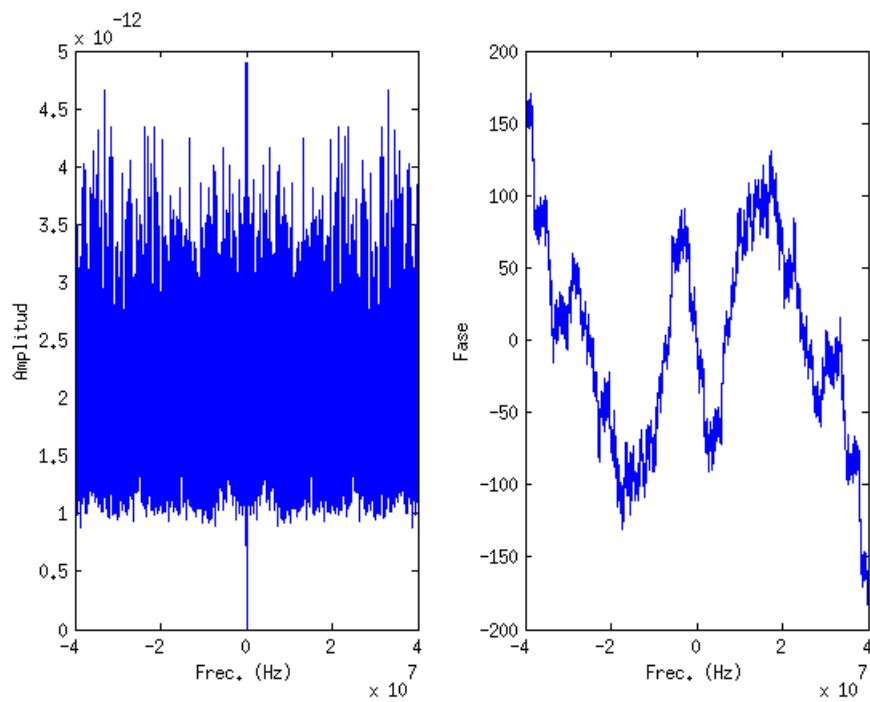


Figura 4.9: Valores propios asociados al tercer vector propio en DORT.

4.7. Aplicación: DORT en un medio real, detección y localización de reflectores

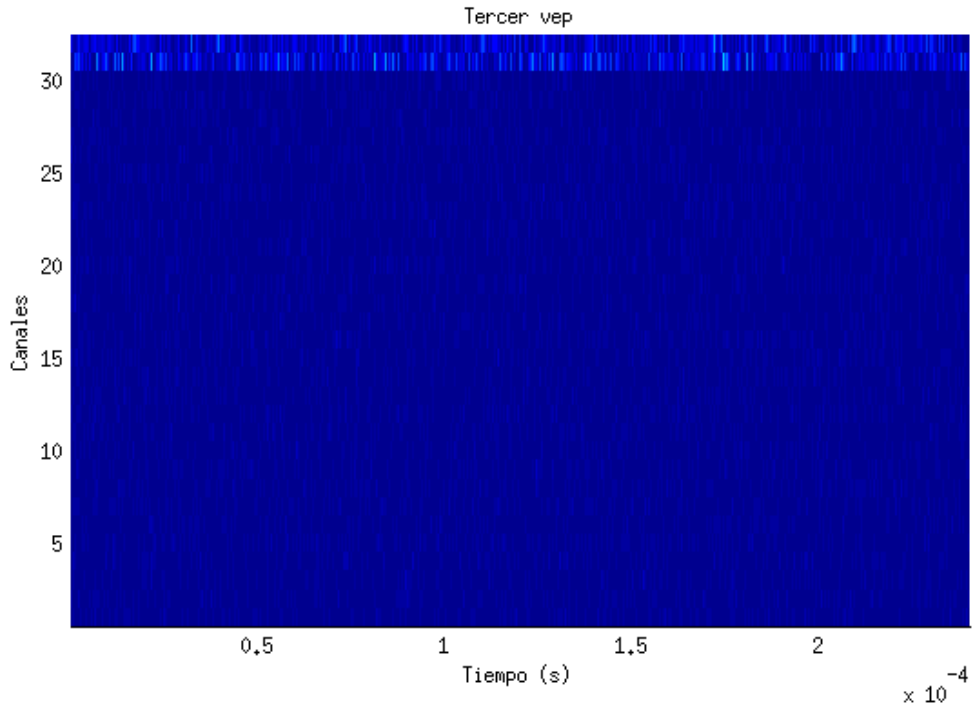


Figura 4.10: Vector propio con tercer mayor valor propio, sintetizado.

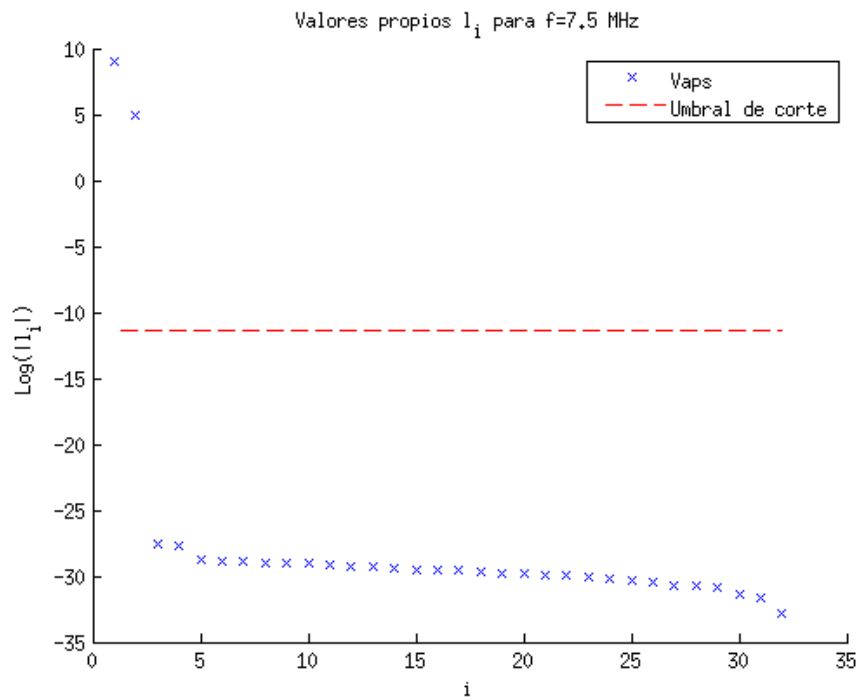


Figura 4.11: Valores propios del operador para la frecuencia central de excitación.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

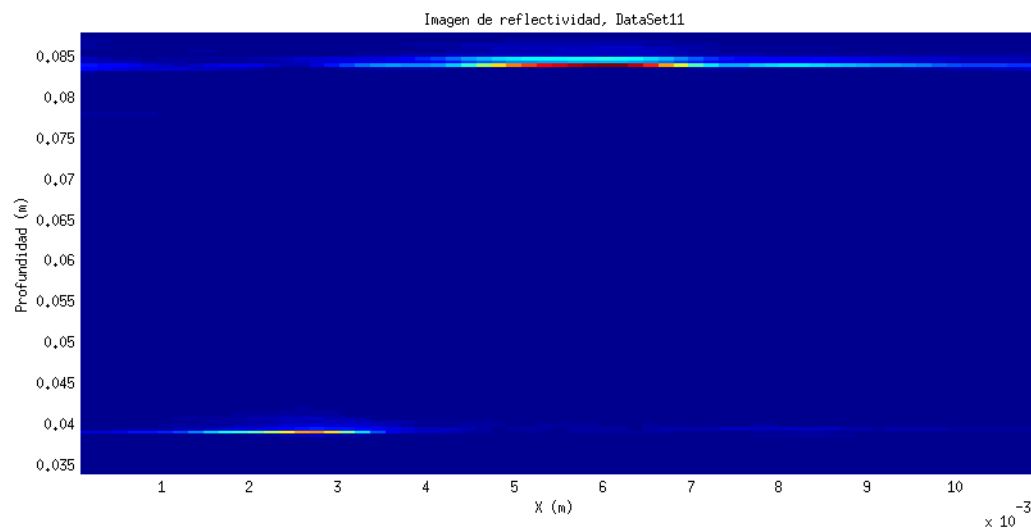


Figura 4.12: Mapa de reflectividades generado mediante un estimador local activo para la primera situación experimental real.

es el caso en la situación experimental que se presenta, y por lo tanto el operador K puede obtenerse de acuerdo a lo expresado en la Sección 4.3.

El segundo de los problemas es más difícil de subsanar, pues implica una deficiencia inherente de los datos. A efectos de poder trabajar, se realizó una ecualización previa de los mismos, de manera de normalizar las energías correspondientes a los distintos canales. Esto tiene como efecto secundario aumentar el ruido presenten en los canales cuya ganancia era menor. Se puede ver en las señales que mejoran visualmente pero no son tan limpias como en los ecos generados artificialmente.

A efectos del análisis se estudiaron dos situaciones experimentales. La primera de ellas es similar a la que se utilizó para los ejemplos en el Capítulo 3, donde se excita un medio en el que se encuentran presentes dos reflectores de cobre a una profundidad aproximada de 40mm y 90mm respectivamente. En la segunda situación solo uno reflector (a 90mm) se encuentra presente en el medio. En ambos casos se utilizaron 5 formas de onda para la excitación: una onda plana, y luego ondas esféricas (parciales) que convergirán a 200mm , 150mm , 100mm y 50mm sobre el eje del sistema, respectivamente. La excitación en cada canal coincidía con una onda pulsada de frecuencia central $7,5\text{MHz}$. El muestreo se realizó a 80MHz .

Lo que se esperaría encontrar es que en el primer caso existen solamente 2 valores propios no nulos y en el segundo caso un único valor propio no nulo. Adicionalmente, si se utiliza un algoritmo de *beamforming* pasivo y monocromático (propagación hacia atrás) de los vectores propios asociados, se espera que la onda se concentre sobre la posición de los reflectores.

4.7. Aplicación: DORT en un medio real, detección y localización de reflectores

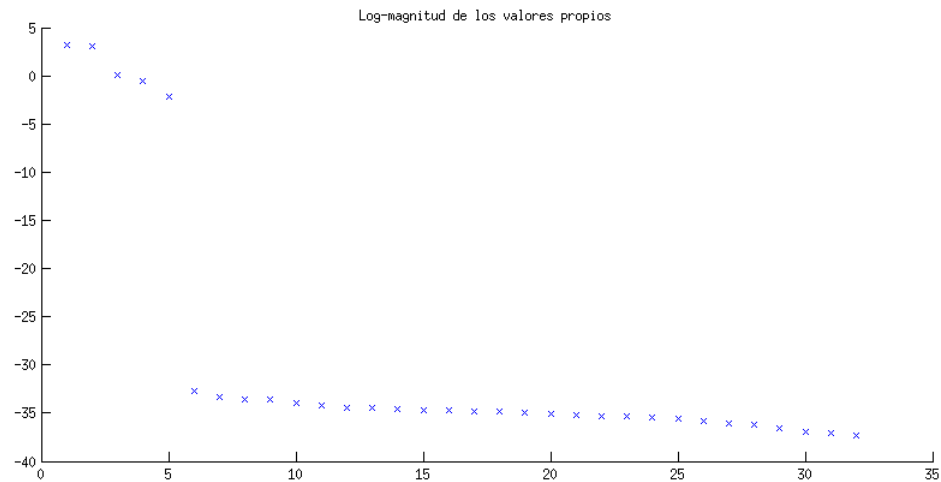


Figura 4.13: Valores propios obtenidos mediante DORT para la primera situación experimental real.

La Figura 4.13 muestra la magnitud de los valores propios asociados a la primera situación. Como puede verse, existen 5 valores propios cuya magnitud dista de ser nula¹¹, contradiciendo lo esperado. Sin embargo, analizando el mapa de reflectividades generado mediante el *beamforming* descrito para cada uno de los tres primeros vectores propios (Figura 4.16), puede apreciarse que solo los vectores propios asociados a los primeros dos valores propios muestran una fuerte convergencia de la energía sobre el espacio. Más aún, dicha convergencia ocurre aproximadamente en las zonas que se esperaba (la Figura 4.12 muestra una imagen de reflectividad generada mediante los algoritmos descritos en el Capítulo 3 a efectos de comparar posiciones).

La segunda situación presenta resultados similares, donde parecen existir 5 valores propios no nulos (Figura 4.15), pero solo uno de ellos está asociado a un vector propio cuya energía se concentra espacialmente (Figura 4.17), de acuerdo a lo esperado.

A partir de los resultados anteriores es posible concluir que la implementación realizada de DORT es funcional en situaciones reales, incluso cuando no se cuenta con suficientes parejas pulso-eco como para determinar completamente el sistema. La presencia de valores propios no esperados puede responder a varios elementos. El más evidente de ellos es la baja calidad de los datos, que si presentan demasiado ruido, determinarán la existencia de nuevos vectores propios no asociados a un espacio nulo del operador de retorno temporal. Como compensación, estos vectores propios no deberían presentar convergencia espacial de la energía, lo que puede uti-

¹¹Notar que por construcción de la matriz, solo 5 valores propios pueden ser no nulos en teoría. En la práctica estos valores propios tendrán módulos no nulos debido a errores numéricos.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

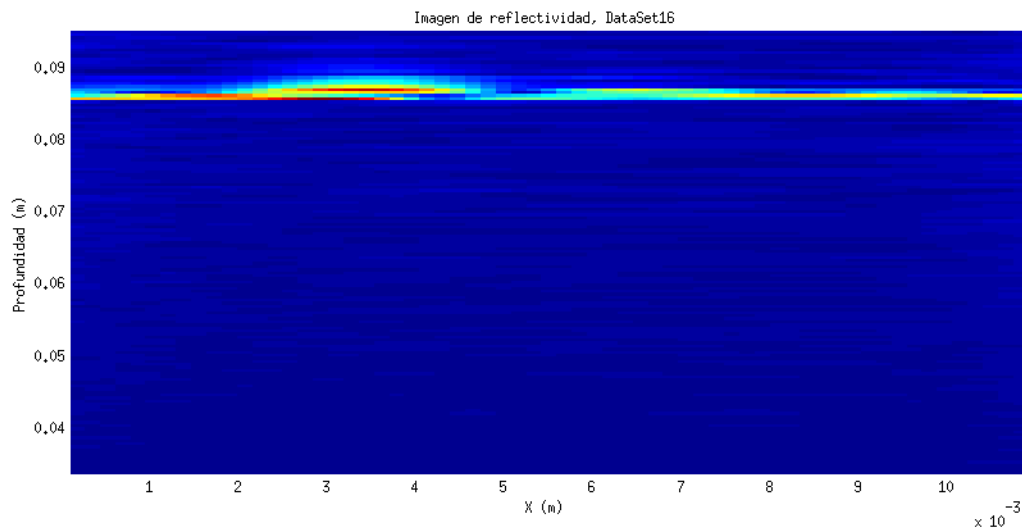


Figura 4.14: Mapa de reflectividades generado mediante un estimador local activo para la segunda situación experimental real.

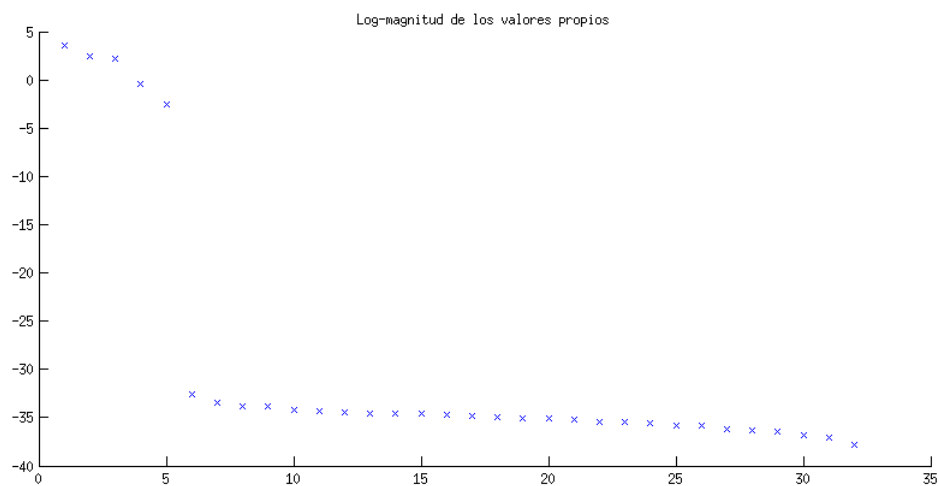


Figura 4.15: Valores propios obtenidos mediante DORT para la segunda situación experimental real.

lizarse para identificarlos. Por otro lado, estudios recientes sobre el método DORT sugieren que valores propios no nulos pueden aparecer a causa de la propagación de ondas elásticas en el interior de los reflectores [14]. Sin embargo dichos vectores propios deberían presentar también una convergencia espacial que no parece estar presente en las situaciones estudiadas. Un análisis con mejor calidad de datos debe realizarse para dilucidar las causas de la existencia de más valores propios no nulos de los esperados.

4.8. Aplicación: focalización selectiva en medios no homogéneos mediante retorno temporal

4.8. Aplicación: focalización selectiva en medios no homogéneos mediante retorno temporal

El segundo tipo de aplicación, y quizás la más interesante, de las técnicas de retorno temporal es la focalización selectiva de ondas acústicas en medios no necesariamente homogéneos y desconocidos. La idea surge directamente de la invarianza temporal de la ecuación de onda que da lugar al concepto de retorno temporal: si se conoce¹² una onda que diverge desde un foco, la inversión temporal de dicha onda debe ser una que converge al mismo foco.

La destrucción selectiva mediante ultrasonido de alta intensidad de piedras en riñones, cuya posición no es determinable con precisión es una típica aplicación de interés para éste método [22, 24].

En el contexto de DORT, esto implica que cada una de las respuestas obtenidas mediante el algoritmo pueden invertirse temporalmente y al enviarlas convergeran sobre el reflector del que provienen. Lo interesante es que esto puede hacerse aún en presencia de un medio no homogéneo, en el que no es posible utilizar los resultados de la aplicación anterior para ubicar la posición de dicho reflector.

4.8.1. Problemas con el equipo de adquisición

El estudio de esta aplicación quedó truncado por el malfuncionamiento del equipo de adquisición en el Laboratorio de Acústica Ultrasonora del IFFC, particularmente durante los últimos meses de este trabajo (primer semestre de 2012). Adicionalmente a problemas de ganancia desigual entre los distintos canales (que el equipo presentó desde su adquisición), existieron problemas de mapeo entre los registros de memoria y los canales correspondientes del transductor, y un funcionamiento errático en general que causaba la obtención de datos puramente ruidosos o un congelamiento del equipo (especialmente durante la ejecución de series de experimentos sucesivos como es necesario para la aplicación del método DORT) que requería de su renicialización en forma frecuente.

En el caso de que el equipo se hubiera encontrado funcionando adecuadamente, era la intención realizar dos tipos de estudio de inversión temporal: uno iterativo, regido por los conceptos desarrollados al principio de este capítulo; y otro mediante la identificación de los vectores y valores propios principales mediante DORT y su re-emisión mediante una síntesis adecuada. A modo de guía para una posible continuación de este trabajo, ambos estudios se detallan en la próxima sección.

¹²Aquí 'conoce' se usa en el sentido que deriva del teorema de Green, es decir, debe tenerse información de la presión y velocidad normal en una superficie que encierre el volumen de interés.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

4.8.2. Trabajos pendientes

Uno de los estudios que quedó pendiente es el de la convergencia del método iterativo y la forma de las soluciones obtenidas de la iteración, para su comparación con los vectores propios obtenidos mediante DORT.

En el caso de DORT, sería necesario establecer algún procedimiento de síntesis de señales temporales a partir de los vectores propios devueltos por el algoritmo, según se describe en la Sección 4.9. El camino menos complejo pasa por considerar una señal monocromática pulsada, y realizar su síntesis tratándola como una señal monocromática pura¹³. Cualquiera fuera la síntesis realizada, es de esperar que la señal recibida sea una versión distorsionada de la emitida, por lo que debería realizarse alguna método de *pulse shaping* (por ejemplo, mediante un filtrado inverso) si se desea realizar el experimento en forma iterativa, lo que es necesario para probar la invarianza de los vectores propios y poder realizar una comparación con la inversión temporal iterada. Esta consideración es válida también para la inversión temporal iterada, ya que se espera que las señales registradas en cada paso de la iteración vayan incrementando su duración temporal debido a las respuestas temporales asociadas con reflectores elásticos, medios dispersivos, y la respuesta no ideal de los transductores [24].

Aunque el experimento no llegó a conducirse durante este trabajo, fue implementado un algoritmo de adquisición iterativa con un paso intermedio de *pulse shaping* a estos efectos.

Otro estudio que se buscaba realizar era el de la focalización espacial de las señales. En teoría es posible focalizar toda la energía de la señal sobre un reflector individual, dado un plano de focalización (profundidad). Sin embargo este resultado es aplicable únicamente a reflectores puntuales, lo que no es realista. La bibliografía sugiere que la convergencia ocurrirá sobre el punto de mayor reflectividad aparente en un reflector discreto [24], resultado que se esperaba poder reproducir.

4.9. Conclusiones

En este capítulo se hizo un estudio teórico del método DORT, y se realizó una implementación básica y funcional del mismo. Se presentaron y analizaron resultados obtenidos a partir de dicha implementación, tanto para datos sintéticos generados mediante un simulador especialmente desarrollado para este trabajo, así como con datos experimentales obtenidos en el Laboratorio de Acústica Ultrasónica del IFFC.

¹³La forma del pulso debiera de elegirse criteriosamente, para evitar tener un ancho de banda muy grande en la señal que implicara alejarse mucho de la hipótesis de monocromaticidad.

4.9. Conclusiones

Si bien los resultados conseguidos son alentadores, no puede omitirse de estas conclusiones el hecho de que el trabajo fue truncado parcialmente por la imposibilidad de conseguir datos confiables en forma consistente. Esto imposibilitó realizar estudios sobre los resultados más avanzados del método, incluyendo una comparación contra métodos iterativos de retorno temporal, así como los vectores y valores propios asociados a reflectores extendidos.

Los primeros resultados aquí presentados dejan abierta una línea de investigación prometedora debido al extendido uso del método DORT para la prospección de medios, pero cuyos resultados iniciales deben ser validados mediante un mayor número de experimentos reales¹⁴.

¹⁴En oposición a experimentos simulados.

Capítulo 4. Descomposición del operador de retorno temporal (DORT)

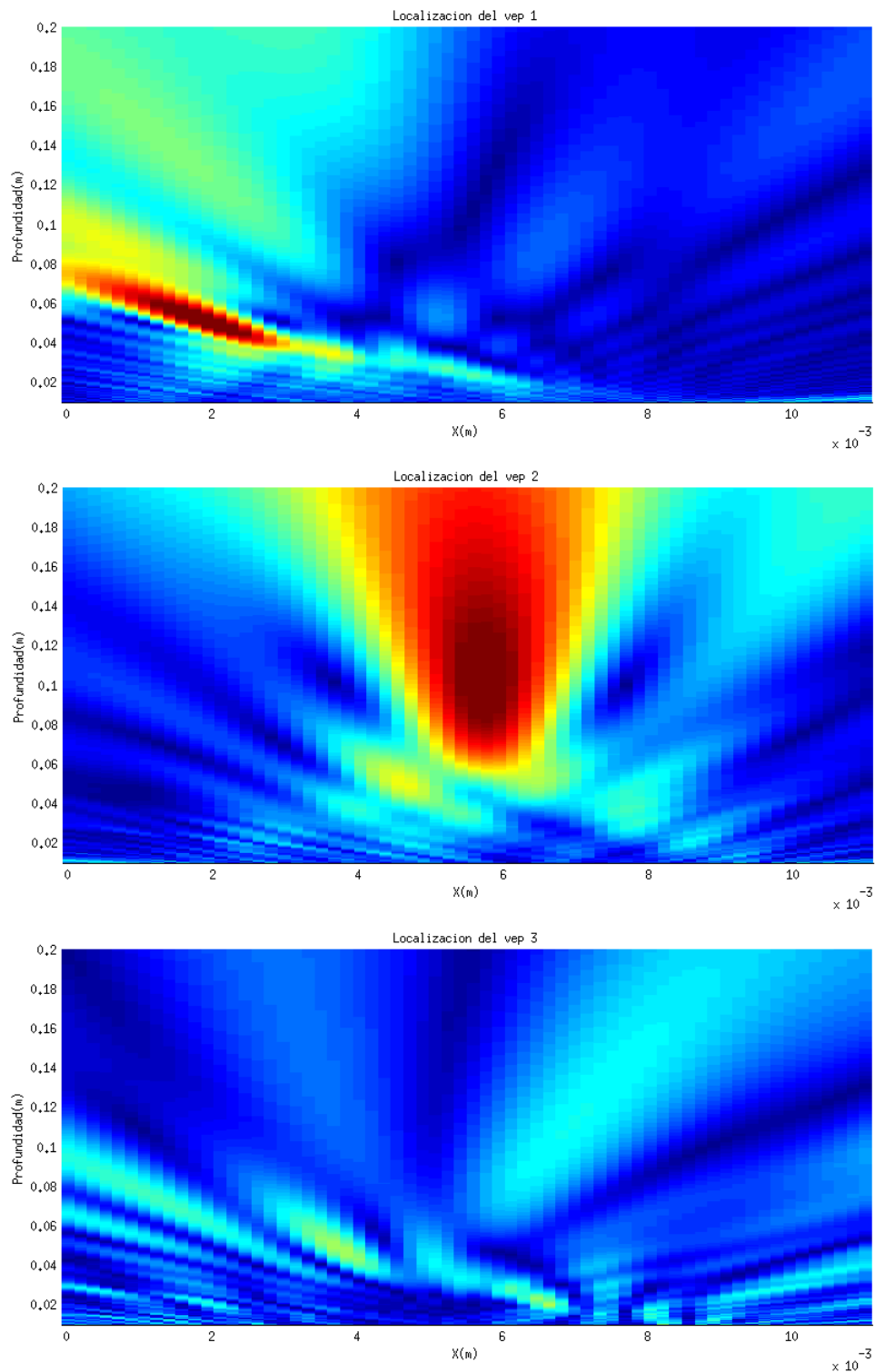


Figura 4.16: Vectores propios obtenidos mediante DORT para la primera situación experimental real.

4.9. Conclusiones

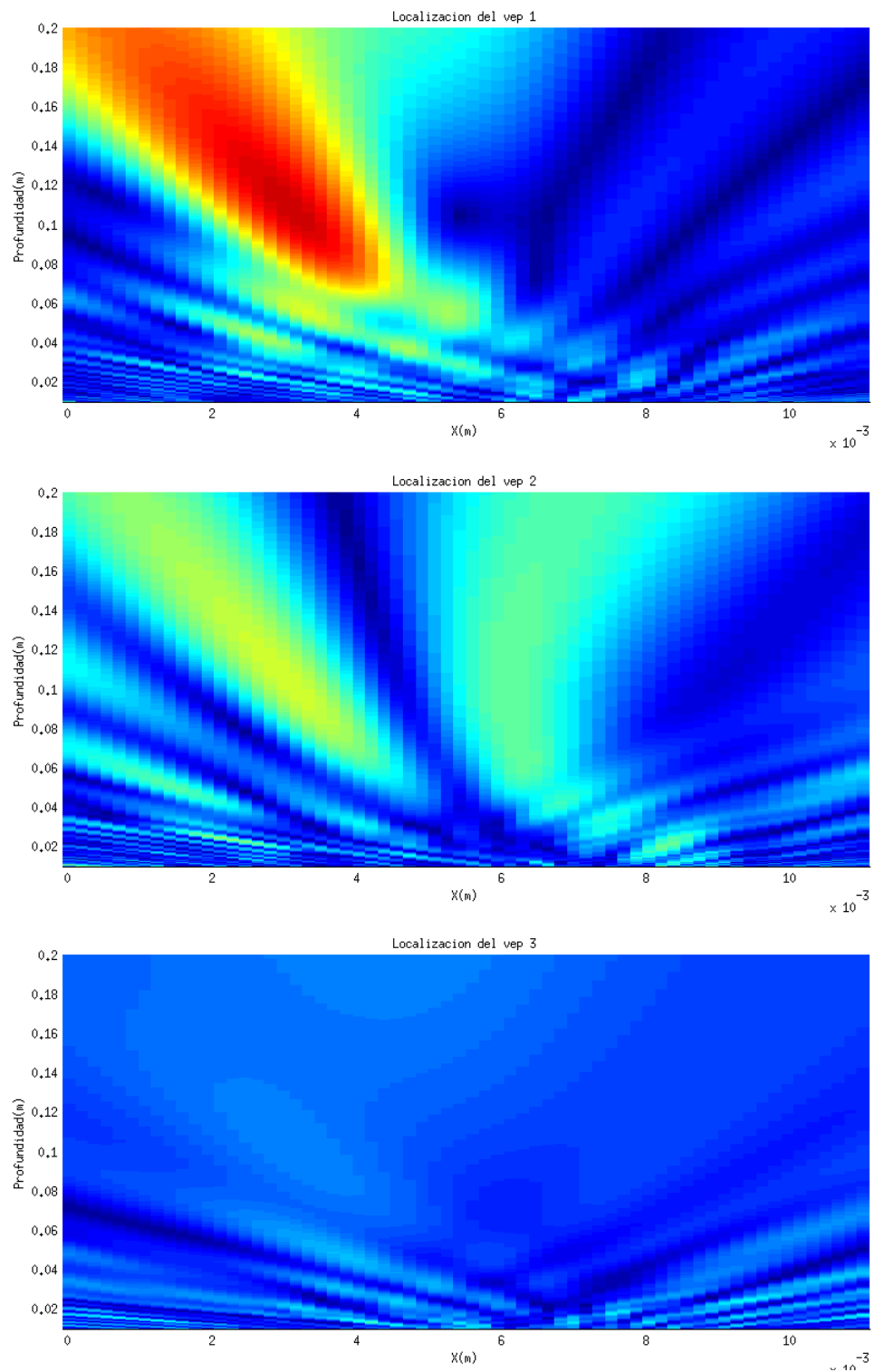


Figura 4.17: Vectores propios obtenidos mediante DORT para la segunda situación experimental real.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se estudiaron y pusieron en práctica algunas técnicas de procesamiento de señales aplicadas a los problemas de generación de imágenes y prospección de medios por ultrasonido.

En primera instancia se hizo un estudio de la situación física y se estableció un modelo adecuado de la misma, validado mediante el desarrollo de estimadores de reflectividad que probaron ser adecuados para las situaciones evaluadas. Los estimadores desarrollados fueron estudiados en sus características y capacidad de resolución, y sus implementaciones quedaron a disposición del Laboratorio de Acústica Ultrasonora (LAU) como productos finales de este trabajo.

Se realizó también un estudio del método DORT, la teoría que lo fundamenta, sus limitaciones y resultados asociados que figuran en la literatura. Se realizó también una implementación de dicho método, que fue validada con datos reales y simulados. Dicha implementación es también uno de los productos finales de este trabajo, y quedó a disposición del LAU.

El estudio del método DORT quedó truncado por la imposibilidad de obtener datos experimentales debido a las fallas en el equipo de adquisición del que se disponía. De manera notable, el estudio de la capacidad del DORT para realizar una focalización selectiva en medios inhomogéneos no fue realizado, siendo que esta capacidad es una de las más interesantes de los métodos de retorno temporal. Este estudio, así como la comparación con las técnicas de retorno temporal iterativas, es sin duda un trabajo que debería realizarse a futuro si se desea continuar con esta línea de investigación.

En la primera parte de este trabajo, existieron puntos que se estudiaron apenas superficialmente y que también merecerían ser atendidos por trabajos futuros. En el marco de la generación de imágenes por ultrasonido, sería interesante profundizar el estudio del efecto de la grilla de discretización para ecuaciones integrales. Una selección adecuada de la grilla podría solucionar en gran parte los problemas de condicionamiento del sistema, y podría también brindar información significa-

Capítulo 5. Conclusiones

tiva sobre el poder de resolución de un sistema de generación de imágenes. Otro efecto que puede evaluarse es el de la elección de señales de excitación en el caso activo. Aunque la mayoría de los ejemplos presentados en la literatura dicen trabajar con señales monocromáticas, en realidad lo hacen con versiones inventanadas de las mismas que modifican sustancialmente su contenido espectral y por lo tanto las condiciones de trabajo. Es conocido también que el ancho de banda de las señales utilizadas es inversamente proporcional a la cota de Cramer-Rao para el problema de estimación del tiempo de vuelo, por lo que señales de ancho de banda reducido disminuyen la capacidad de localización de los objetivos [7]. Señales con menores correlaciones temporales también presentan ventajas en la capacidad de distinguir entre objetos cercanos para pulsos de igual duración y presentan una mayor capacidad de rechazo al ruido [3]. Podría resultar útil entonces estudiar el uso de realizaciones de señales estocásticas u otras señales de amplio espectro como excitación del medio.

Como reflexión final, es posible decir que se cumplió con el objetivo inicial de ganar un conocimiento adecuado de la problemática y las técnicas utilizadas en el área de prospección de un medio por ultrasonido, a pesar de los problemas que existieron con la adquisición de datos experimentales.

Apéndice A

Principio de Huygens

A.1. Problema general de propagación en un medio homogéneo

Se presentan en este apéndice algunos resultados conocidos de teoría de ondas, que serán útiles para realizar un modelo de las señales ultrasónicas con las que se trabaja en los restantes capítulos.

El problema general de propagación de una onda escalar (función φ , que en nuestro caso será el potencial de la velocidad) en un medio homogéneo puede expresarse como sigue:

$$\begin{aligned}\nabla^2\varphi &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \vec{r} \in V \\ \varphi(\vec{r}, 0) &= 0, \vec{r} \in V \\ \frac{\partial\varphi}{\partial t}(\vec{r}, 0) &= 0, \vec{r} \in V \\ \varphi(\vec{r}, t) &= h(\vec{r}, t), \vec{r} \in S \\ \nabla\varphi \cdot \hat{n} &= g(\vec{r}, t), \vec{r} \in S\end{aligned}$$

A.1.1. Teorema integral de Helmholtz-Kirchhoff

El teorema de Helmholtz prueba, a partir de la segunda igualdad de Green, que para una onda monocromática:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \int_S \left(G \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\vec{r}', \vec{r} \in V, S = \partial V$$

Siendo $G(\vec{r}, \vec{r}', t)$ una función cualquiera que cumple con la ecuación de onda ($\nabla'^2 G + k^2 G = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$) [5, 8].

La función G se denomina función de Green y existe libertad de elección de la misma. Es útil realizar una elección que permita simplificar la expresión anterior

Apéndice A. Principio de Huygens

Condición de radiación de Sommerfeld

La superficie de integración comúnmente asumida en situaciones prácticas es una media esfera de radio arbitrariamente grande, cerrada por un plano (meridiano). Si la función G que se toma decrece al menos como $1/\bar{r}'$, y pasa lo mismo con la función de interés φ , la contribución del cascarón esférico tiende a 0 para radios suficientemente grandes. Esta condición se denomina condición de radiación de Sommerfeld.

Considerando funciones que cumplan esta condición, es posible reducir la integral anterior a una superficie no cerrada, pero infinita (idealmente un plano, aunque pueden adoptarse otras geometrías).

Función de Green para el espacio libre

La elección más común para la función de Green es $G_1 = \frac{e^{ik|\bar{r}''|}}{|\bar{r}''|}$, siendo $\bar{r}'' = \bar{r} - \bar{r}'$. Tomando dicha función y realizando una síntesis en frecuencia (Fourier) para lidiar con ondas no monocromáticas, la integral de Helmholtz se reduce a:

$$\varphi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \varphi' \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \frac{1}{|\bar{r}''|} - \frac{1}{c|\bar{r}''|} \frac{\partial |\bar{r}''|}{\partial \hat{n}} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{|\bar{r}''|} \frac{\partial \varphi'}{\partial \hat{n}} ds'$$

Siendo $\varphi' = \varphi(\bar{r}', t - \frac{|\bar{r}''|}{c})$. La notación $\frac{\partial}{\partial \hat{n}}$ sustituye a $\nabla \cdot \hat{n}$. Dicha ecuación puede re-expresarse como:

$$\varphi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{1}{|\bar{r}''|^2} \frac{\partial |\bar{r}''|}{\partial \hat{n}} - \frac{1}{c|\bar{r}''|} \frac{\partial |\bar{r}''|}{\partial \hat{n}} \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{|\bar{r}''|} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} \right) \varphi' ds' \quad (\text{A.1})$$

Donde el primer término se puede despreciar en favor del 2do término cuando $|\bar{r}''| \gg \lambda$ (asumiendo que la señal es de banda acotada).

Si suponemos que uno de los restantes términos (cualquiera) es nulo en la superficie de integración, se llega a una versión del principio de Huygens para una superficie S genérica. Sin embargo, en el caso más general ambos términos son relevantes para el cálculo, pero no pueden ser conocidos simultáneamente.

Otras funciones de Green útiles

Cuando la única sección relevante de la superficie S (a efectos de la contribución a la integral) es plana, se puede elegir como función de Green $G_+ = \frac{e^{ikr_1}}{|r_1|} + \frac{e^{ikr_2}}{|r_2|}$, siendo r_2 la reflexión especular del vector r_1 respecto de la superficie S . Donde r_1 es el mismo vector que anteriormente se denominó \bar{r}'' . En este caso queda (exactamente):

$$\varphi(\bar{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S -\frac{2}{|r_1|} \frac{\partial \varphi'}{\partial \hat{n}} ds = \frac{1}{4\pi} \int_S -\frac{2}{|r_1|} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}} * \delta(t - \frac{|r_1|}{c}) ds' \quad (\text{A.2})$$

A.1. Problema general de propagación en un medio homogéneo

Esta expresión representa el principio de Huygens en forma exacta para el potencial velocidad a partir de la componente normal de la velocidad en una superficie. La misma es particularmente útil ya que los transductores ultrasónicos imponen y miden la velocidad normal a su superficie, por lo que se tiene acceso experimental directo a las mismas.

En forma análoga se puede trabajar con $G_- = \frac{e^{ikr_1}}{|r_1|} - \frac{e^{ikr_2}}{|r_2|}$, lo que deja:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S \left(\frac{2}{|r_1|^2} \frac{\partial |r_1|}{\partial \hat{n}} \varphi' - \frac{2}{c|r_1|} \frac{\partial r_1}{\partial \hat{n}} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right) ds' \quad (\text{A.3})$$

Esta expresión es análoga a la anterior, para el caso en que se conoce la presión en lugar de la componente normal de la velocidad en la superficie.

A.1.2. Linealidad e invarianza

Las ecuaciones anterior permiten asimilar el proceso de propagación de una onda a un sistema lineal invariante en el tiempo, donde la respuesta total generada sobre un punto puede calcularse como la integral de múltiples respuestas generadas por todos los puntos de una superficie. Aceptando trabajar con distribuciones:

$$\varphi_2(\vec{r}, t) = \int_S \varphi_1(\vec{r}', t') * h(\vec{r}, \vec{r}', t, t') ds'$$

Siendo φ_1 la función conocida en la superficie, y φ_2 otra, en principio distinta, que se quiere calcular en un punto del volumen.

Más aún, la respuesta causada por un impulso en el tiempo en un punto de la superficie S depende temporalmente sólo de la diferencia de tiempos entre la señal excitadora (t') y el de medición de la respuesta (t).

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Apéndice B

Resultados algebraicos relevantes para el desarrollo de DORT

B.1. Relación entre los valores y vectores propios asociados a un operador $K.C(*)$ y al operador hermítico KK^\dagger

Un resultado de interés es la relación entre los valores y vectores propios del operador de retorno temporal $K.C(*)$ y el operador KK^\dagger . Donde $C(*)$ es el operador de conjugación y K es una matriz cuadrada cualquiera.

Supongamos que se conocen el conjunto de valores y vectores propios del operador $K.C(*)$, denominados λ_i y \vec{v}_i respectivamente. Entonces se cumple

$$\lambda_i \vec{v}_i = K.C(\vec{v}_i) = K.\vec{v}_i^* \quad (\text{B.1})$$

Es sencillo probar que los vectores propios asociados a este operador coinciden con los vectores propios asociados al operador KK^\dagger . Conjugando el resultado anterior tenemos

$$\lambda_i^* \vec{v}_i^* = K^\dagger \vec{v}_i \quad (\text{B.2})$$

Entonces, si aplicamos el operador $K^\dagger.K$ al vector v obtenemos:

$$K.K^\dagger.\vec{v}_i = K\lambda_i^*\vec{v}_i^* = \lambda_i^*K\vec{v}_i^* = \lambda_i^*\lambda_i\vec{v}_i = |\lambda_i|^2\vec{v}_i \quad (\text{B.3})$$

De donde se deduce que ambos operadores comparten vectores propios, y los valores propios de KK^\dagger coinciden con el módulo cuadrado de los valores propios del operador $K.C(*)$. La mayor diferencia entre trabajar con el operador KK^\dagger en lugar de $K.C(*)$ es la pérdida de información de fase de los valores propios,

¹En el artículo (prada:2067) se denomina operador de retorno temporal a KK^\dagger directamente, pues el mismo está bien definido aún en los casos que el conjunto de transductores de emisión y recepción sean distintos.

Apéndice B. Resultados algebraicos relevantes para el desarrollo de DORT

que representa información sobre la distancia (tiempo de vuelo) de la señal [16]. Dicha información puede recuperarse una vez que se conocen los vectores propios del sistema, mediante la aplicación del operador $K.C(*)$ a los mismos.

En el caso de que K no fuera una matriz cuadrada (que ocurre cuando se utilizan distintos conjuntos de transductores para la excitación y registro del eco), el desarrollo anterior sigue siendo válido si consideramos la SVD del operador K y se trabaja con los vectores propios por izquierda del operador y los valores propios asociados.

B.2. Estudio de los valores y vectores propios del operador $K.K^\dagger$

De acuerdo al resultado anterior, los vectores propios del operador $K.K^\dagger$ corresponden con invariantes del proceso de inversión temporal. A continuación se presenta una prueba de que, en presencia de una cantidad finita de reflectores puntuales idealmente resolubles² en el medio, las respuestas asociadas a cada uno de los reflectores son vectores propios del sistema con valores propios no nulos.

Como se presenta en el capítulo 2, el operador de propagación K en su forma matricial puede descomponerse como $K = H_a R H_b^T$, donde la matriz H_a representa la transferencia entre los transductores utilizados para la emisión y los distintos puntos del medio, la matriz H_b representa la transferencia entre los distintos puntos del medio y los transductores utilizados en recepción ($H_a = H_b$ en el caso de que se utilicen los mismos transductores para emisión y recepción), y la matriz R (diagonal) la reflectividad del medio en una grilla arbitrariamente elegida. En este caso el operador $K.K^\dagger$ puede descomponerse como:

$$K.K^\dagger = H_a R H_b^T H_b^* R^\dagger H_a^\dagger \quad (\text{B.4})$$

Dado que la matriz R es diagonal, denominemos r_i a sus elementos. Llamando h_{bi} a las columnas de H_b , el producto $H_b.R$ tiene columnas $r_i.h_{bi}$. El producto $R H_b^T H_b^* R^\dagger$ tiene entonces elementos $r_j.r_i^* \langle h_{bi}, h_{bj} \rangle$, donde $\langle a, b \rangle$ representa el producto interno entre vectores. Si suponemos que estamos en presencia de un conjunto finito de reflectores puntuales, los valores r_i serán mayoritariamente 0, a excepción de las posiciones correspondientes a los reflectores existentes en el medio. Si además aceptamos que para los reflectores existentes ($r_i \neq 0$) se cumple que sus respuestas al impulso asociadas son ortogonales entre sí ($\langle h_{bi}, h_{bj} \rangle = \delta_{ij} \|h_{bi}\|^2$), se puede reducir:

$$R H_b^T H_b^* R^\dagger = \text{diag}(|r_i|^2 \|h_{bi}\|^2) \quad (\text{B.5})$$

²Idealmente resolubles refiere a que las respuestas asociadas de los reflectores son ortogonales entre sí.

B.2. Estudio de los valores y vectores propios del operador $K.K^\dagger$

Considerando ahora el producto $K.K^\dagger h_{ai}$, donde h_{ai} es la respuesta asociada al reflector i -ésimo ($r_i \neq 0$) respecto del conjunto de transductores de emisión (y por lo tanto también la i -ésima columna de la matriz H_a):

$$K.K^\dagger h_{ai} = \sum_j h_{aj} \cdot |r_j|^2 |h_{bj}|^2 \langle h_{aj}, h_{ai} \rangle \quad (\text{B.6})$$

Si se acepta la condición de ortogonalidad de respuestas de los reflectores también respecto de los transductores de emisión ($\langle h_{ai}, h_{aj} \rangle = \delta_{ij} \|h_{ai}\|^2$, $\forall i, j/r_i \neq 0, r_j \neq 0$), existen tres situaciones posibles:

- $j \neq i$ y el punto j -ésimo corresponde a un reflector ($r_j \neq 0$). De acuerdo a la condición de ortogonalidad: $\langle h_{ai}, h_{aj} \rangle = 0$
- $j \neq i$ y el punto j -ésimo no corresponde a un reflector ($r_j = 0$).
- $j = i$

Solo en el tercer caso el término correspondiente de la sumatoria será no nulo. Por lo tanto:

$$K.K^\dagger h_{ai} = h_{ai} \cdot |r_i|^2 |h_{bi}|^2 \|h_{ai}\|^2 \quad (\text{B.7})$$

Queda demostrado entonces que las respuestas asociadas a los reflectores son vectores propios del sistema, con valores propios iguales al cuadrado de la reflectividad aparente:

$$\mu_i = (|r_i| \cdot |h_{bi}| \cdot \|h_{ai}\|)^2 \quad (\text{B.8})$$

Para un medio homogéneo y utilizando el mismo conjunto de transductores para la emisión y recepción, esto implica que los valores propios son directamente proporcionales a la reflectividad e inversamente proporcionales a la potencia cuarta de la distancia media del reflector al array.

Esta página ha sido intencionalmente dejada en blanco.

Referencias

- [1] R.C. Aster, B. Borchers, and C.H. Thurber. *Parameter Estimation and Inverse Problems*, volume 90. Elsevier Science, 2004.
- [2] G. Carter. Time delay estimation for passive sonar signal processing. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process*, 29(3):463 – 470, 1981.
- [3] R.D. Christ and S. Robert L. Wernli. *The Rov Manual: A User Guide for Observation-Class Remotely Operated Vehicles*. Elsevier Science & Technology Books, 2007.
- [4] M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. I: Basic principles. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control*, 39(5):555 –566, 1992.
- [5] J.W. Goodman. *Introduction To Fourier Optics*. Roberts & Company, 2005.
- [6] E. Hecht. *Optics*. Addison-Wesley, 2002.
- [7] S.M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume I: Estimation Theory*. Prentice Hall, 1993.
- [8] G.S. Kino. *Acoustic waves: devices, imaging, and analog signal processing*. Prentice-Hall, 1987.
- [9] W.C. Knight, R.G. Pridham, and S.M. Kay. Digital signal processing for sonar. *Proc. IEEE*, 69(11):1451 – 1506, 1981.
- [10] S.K. Lehman and A.J. Devaney. Transmission mode time-reversal super-resolution imaging. *Journal of the Acoustical Society of America*, 113(5):2742–2753, 2003.
- [11] F. Lemoult, A. Ourir, J. de Rosny, A. Tourin, M. Fink, and G. Lerosey. Time reversal in subwavelength-scaled resonant media: Beating the diffraction limit. *International Journal of Microwave Science and Technology*, 2011:463 – 470, 2011.
- [12] G. Lerosey, J. de Rosny, A. Tourin, and M. Fink. Focusing beyond the diffraction limit with far-field time reversal. *Science*, 315(5815):1120–1122, 2007.
- [13] G.R. Lockwood, Pai-Chi Li, M. O’Donnell, and F.S. Foster. Optimizing the radiation pattern of sparse periodic linear arrays. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control*, 43(1):7 –14, 1996.

Referencias

- [14] J.G. Minonzio, C. Prada, and M. Fink. Decomposition of the time-reversal operator in the rayleigh limit. *Journal of the Acoustical Society of America*, 121(5):3047–3047, 2007.
- [15] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer. *Discrete-time signal processing*. Prentice Hall, 2010.
- [16] C. Prada and M. Fink. Eigenmodes of the time reversal operator: A solution to selective focusing in multiple-target media. *Wave Motion*, 20(2):151 – 163, 1994.
- [17] C. Prada and M. Fink. Separation of interfering acoustic scattered signals using the invariants of the time-reversal operator. Application to lamb waves characterization. *Journal of the Acoustical Society of America*, 104(2):801–807, 1998.
- [18] C. Prada, S. Manneville, D. Spoliansky, and M. Fink. Decomposition of the time reversal operator: Detection and selective focusing on two scatterers. *Journal of the Acoustical Society of America*, 99(4):2067–2076, 1996.
- [19] C. Prada, J.L. Thomas, and M. Fink. The iterative time reversal process: Analysis of the convergence. *Journal of the Acoustical Society of America*, 97(1):62–71, 1995.
- [20] C. Prada, F. Wu, and M. Fink. The iterative time reversal mirror: A solution to self-focusing in the pulse echo mode. *Journal of the Acoustical Society of America*, 90(2):1119–1129, 1991.
- [21] D. Rife and R. Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Trans. Inf. Theory*, 20(5):591 – 598, 1974.
- [22] J.L. Thomas, Wu F., and M. Fink. Time reversal focusing applied to lithotripsy. *Ultrasonic Imaging*, 18(2):106 – 121, 1996.
- [23] J. P. Weight and A. J. Hayman. Observations of the propagation of very short ultrasonic pulses and their reflection by small targets. *Journal of the Acoustical Society of America*, 63(2):396–404, 1978.
- [24] F. Wu, J.-L. Thomas, and M. Fink. Time reversal of ultrasonic fields. II: Experimental results. *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelectr., Freq. Control*, 39(5):567 –578, 1992.

Índice de figuras

2.1. Diagrama de un sistema de emisión-respuesta para la prospección de un medio.	5
3.1. Esquema de la situación experimental de prueba para los algoritmos de ecografía.	28
3.2. Eco	29
3.3. Eco con zoom	30
3.4. Estimación de reflectividades local, zona 10mm-90mm	32
3.5. Estimación de reflectividades global, zona 10mm-90mm	32
3.6. Estimación de reflectividades local, zona 30mm-50mm	33
3.7. Estimación de reflectividades global, zona 30mm-50mm	34
4.1. Propagación de una onda acústica hacia una superficie cerrada de transductores. Imagen adaptada de [11].	36
4.2. Retorno temporal de la onda generada mediante la emisión de las señales originales invertidas temporalmente. Imagen adaptada de [11]	36
4.3. Porciones del eco simulado e imagen de reflectividad generada a partir del mismo para la aplicación desarrollada en la Sección 4.6. .	44
4.4. Situación experimental simulada (Sección 4.6).	45
4.5. Valores propios asociados al 1er vector propio en DORT.	46
4.6. Vector propio con mayor valor propio, sintetizado.	47
4.7. Valores propios asociados al segundo vector propio en DORT. . . .	47
4.8. Vector propio con segundo mayor valor propio, sintetizado.	48
4.9. Valores propios asociados al tercer vector propio en DORT.	48
4.10. Vector propio con tercer mayor valor propio, sintetizado.	49
4.11. Valores propios del operador para la frecuencia central de excitación.	49
4.12. Mapa de reflectividades generado mediante un estimador local activo para la primera situación experimental real.	50
4.13. Valores propios obtenidos mediante DORT para la primera situación experimental real.	51
4.14. Mapa de reflectividades generado mediante un estimador local activo para la segunda situación experimental real.	52
4.15. Valores propios obtenidos mediante DORT para la segunda situación experimental real.	52

Índice de figuras

4.16. Vectores propios obtenidos mediante DORT para la primera situación experimental real.	56
4.17. Vectores propios obtenidos mediante DORT para la segunda situación experimental real.	57

Esta es la última página.
Compilado el jueves 28 marzo, 2013.
<http://iie.fing.edu.uy/>