EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DEL CÁLCULO EN LA UNIVERSIDAD.

SIGNIFICATIVE LEARNING OF CALCULUS AT THE UNIVERSITY.

Eleonora Catsigeras[1], Karina Curione[2], Marina Míguez[3]

RESUMEN

Se analizan los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje significativo de algunos contenidos del curso de Cálculo del primer semestre en la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República (Uruguay), a través de algunas consultas de los estudiantes, de sus respuestas y de las explicaciones a sus pares en las clases prácticas.

Palabras clave: Educación superior, enseñanza de la matemática, aprendizaje significativo, Cálculo, constructivismo.

ABSTRACT

We analyze the cognitive processes that are related to the significative learning of some concepts of the course of Calculus in the first semester at the Faculty of Engineering of the Universidad de la República (Uruguay), through the students' questions, their answers and their explanations to colleagues during the practic classes.

Key words: Higher education, mathematics education, significative learning, Calculus, constructivism.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las razones de la dificultad para el aprendizaje de algunos conceptos del Cálculo se encuentra en la característica abstracta intrínseca de dichos temas que, aunque básicos en la Matemática, involucran conceptos elaborados que en apariencia quedan desconectados de las vivencias cotidianas. La formalización de los conceptos del cálculo infinitesimal, diferencial e integral llevó centenas de años a la humanidad, y fue desde el punto de vista de la epistemología genética piagetiana, producto de estadios sucesivos de construcción del conocimiento, que implicaron reorganizaciones a otro nivel de las adquisiciones precedentes. Piaget y García señalan tres grandes períodos en la historia de la matemática: *"el realismo estático de los griegos que se*

[1] Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL) de la Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565 Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

[2] Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: curione@fing.edu.uy

[3] Unidad de Enseñanza de la Facultad de Ingeniería (UEFI). Universidad de la República. J. Herrera y Reissig 565, Montevideo, Uruguay. Correo electrónico: mmiguez@fing.edu.uy

basa en estados permanentes (figuras y números), los cuales proveen un conjunto de conocimientos previos que eran necesarios para el descubrimiento de las transformaciones algebraicas e infinitesimales del S. XVII, cuyos análisis, a su vez, eran indispensables para dar lugar a las estructuras propias de la matemática del S. XIX y de nuestros días." (Piaget y García, 1982) Consideramos que en cada individuo la comprensión constructiva consciente de los conceptos matemáticos no puede obtenerse simplemente aceptando la presentación formal elaborada en su versión final, antes e independientemente de una construcción significativa de ella. Sin embargo, la heterogeneidad e individualidad de las experiencias cotidianas y de las vivencias relativas a los conceptos que se pretende introducir científicamente, presenta un desafío. ¿Cómo apelar a ellas? ¿Cómo incentivar a cada estudiante para que identifique su propio conflicto cognitivo ante un nuevo concepto matemático formalmente presentado?

Visto desde la perspectiva del investigador, la matemática no se desarrolla mediante un formalismo simbólico racional solamente, usando en forma muy predominante el hemisferio izquierdo del cerebro, sino en conexión simultánea con el derecho en un verdadero funcionamiento en paralelo. La investigación en matemática muestra ese hecho, a pesar que la presentación final del trabajo científico matemático suele prescindir de las ideas globales y no racionales que lo crearon, y que trascienden en mucho al formalismo racional lógico del artículo o reporte que presenta finalmente el investigador.

El aprendizaje de la Matemática en general requiere:

- Una actividad y una actitud individuales deliberadas por parte del alumno para reconstruir intrapersonalmente los conceptos, motivado por la actividad de aula y la actividad didáctica del docente, pero en la que nadie le puede sustituir.
- Una actividad y una actitud sociales de los alumnos, entre ellos y con el docente: cuando se aprende matemática es cuando se trata de justificar, sustentar y defender ante los otros los conceptos aprendidos. Desde la perspectiva de Vigotsky las formas superiores de conocimiento son socio-generadas. (Vigotsky, 1982)

Las dos actividades intra e interpersonales con estudiantes fueron investigadas y experimentadas en el primer curso universitario de Cálculo, en clases prácticas y de consulta, con exposición e interacción entre los estudiantes. (Catsigeras, 2001)

Ausubel formula en 1963 la teoría del aprendizaje significativo, una propuesta teórica influyente en el enfoque constructivista (Ausubel, 2002). Presenta un modelo de enseñanza y teoría del aprendizaje centrados en el contexto educativo. Se ocupa en especial "*de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos científicos a partir de los conceptos que el alumno ya ha formado en su vida cotidiana*" (Pozo, 1993).

En el presente trabajo se analizan diferentes conceptos matemáticos trabajados en el curso de Cálculo del primer semestre en la Facultad de Ingeniería y un acercamiento a los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje significativo de los mismos, a través de algunas consultas de los estudiantes, de sus respuestas y de las explicaciones a sus pares en las clases prácticas.

2. CONCEPTOS TOPOLÓGICOS EN LA RECTA REAL.

No resulta difícil relacionar la recta real con el conjunto de números reales. A pesar de la complicación formal para demostrar que *hay una correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta*, el uso cotidiano lo hace fácilmente aceptable para el estudiante. Cuando se da un conjunto de números reales, por ejemplo

(1) $A = \{x \text{ real}: 1 < x \leq \sqrt{3}\} \cup \{x \text{ real}: \sqrt{7} \leq x < 3\}$

resulta necesario ejercitarse mentalmente para visualizar el conjunto de puntos correspondientes en una recta. Esto puede lograrse al principio con un esquema expuesto en papel o pizarrón, pintando de rojo en un eje horizontal los puntos incluidos en el conjunto A y dejando negros los puntos que no están en A. Es necesario apelar al dibujo repetidamente, al principio y cada vez que se trabaje con un conjunto de reales, y no quedarse con la visualización formal simbólica dada por la notación del tipo (1) solamente. Será necesario que cada estudiante apele por sí mismo a elaborar un dibujo, una gráfica o un esquema, hasta que pueda lograr el proceso de aparición automática mental, cuando esa figura se imagina asociada a las palabras que la definen, sin necesidad de dibujarla exteriormente.

En el programa de Cálculo se presentan algunas relaciones entre los conceptos de máximo, extremos y frontera, como por ejemplo las siguientes:

- *Todo conjunto de reales acotado superiormente tiene extremo superior, pero no necesariamente tiene máximo.*
- *Si existe máximo entonces existe el extremo superior y coincide con el máximo.*
- *Existe máximo si y solo si existe extremo superior y este pertenece al conjunto.*

- *El extremo superior y el extremo inferior son puntos frontera pero no necesariamente un punto frontera es extremo superior o inferior.*

Esas relaciones son memorizadas y reproducidas por el estudiante, cuando el docente se limita a exponerlas y demostrarlas formalmente, y en ese caso muchos de los alumnos muestran no haber aprendido profundamente su significado, sino solo en forma verbal y desestructurada.

Observamos que las ideas filosóficas clásicas del conocimiento: racionalismo y empirismo, así como sus polos correlativos en las teorías contemporáneas, están presentes implícitamente en las actitudes y actividades de estudiantes y docentes frente al aprendizaje del cálculo. Ambos polos se manifiestan frecuentemente en los textos y las clases expositivas, acopladas al asociacionismo. Y lo siguiente las justifica: ambas actitudes frente al aprendizaje son necesarias. Pero no son suficientes si hay poca o nula interacción continua con las actividades y actitudes sostenidas por las teorías constructivistas del aprendizaje, la teoría del aprendizaje significativo y la teoría del cambio conceptual.

Para fijar ideas concretas, volvamos al tema del aprendizaje de los conceptos de extremos y puntos frontera de subconjuntos en la recta real. Las definiciones formales son las siguientes:

- Definición*: S = ext sup A si $x \leq S$ para todo x en A y si $S \leq K$ para todo K que sea cota superior de A.*
- Definición: *M = máx A si $x \leq M$ para todo x en A y si M pertenece a A.*
- Definición: *a es punto frontera de A si para todo $\varepsilon > 0$* (se lee: épsilon positivo) *el entorno $B_\varepsilon(a)$* (se lee: B sub épsilon de a) *contiene algún punto de A y algún punto del complemento de A.*

Si el docente no apela a alguna idea globalizadora y a una reflexión constructiva previa a esas definiciones, que tiene en algún momento que ser vivenciada individualmente por el estudiante a partir de sus ideas cotidianas y experiencias previas, creemos que no podrá salir de la reproducción formal para llegar al aprendizaje significativo. Una manera de concretar lo expuesto antes es complementar las definiciones con la siguiente presentación previa:

- En la recta los puntos, como correspondientes de números reales, están ordenados de menor a mayor. Puede imaginarse la recta como una carretera. El conjunto A es el conjunto de paradores que hay en la carretera. Sabe que después del kilómetro 35 no hay más paradores. 35 es una cota superior de A. Y 47 también lo es, y 63, y cualquier número mayor que 35. Y también son cotas superiores todos los números mayores o iguales que el kilómetro donde se encuentra el último parador. El extremo superior de A es el kilómetro donde se encuentra el último parador. Es la menor de las cotas superiores.

- Supongamos que el último parador se encuentra en el kilómetro 32. El extremo superior de A es 32. Es mayor o igual que todos los puntos de A. En este ejemplo 32 pertenece al conjunto A porque es el kilómetro donde hay un parador. Es por lo tanto 32 el máximo de A.
- En todo entorno de 32 hay algún punto de A (por ejemplo el propio punto 32) y también puntos que no están en A (los mayores de 32). Por lo tanto 32 es punto frontera.
- Supongamos que el antepenúltimo parador está en el kilómetro 25 y que todos los demás paradores distan más de dos kilómetros de él. En este caso 25 no es extremo superior ni máximo (porque el máximo es 32), pero es punto frontera pues en todo entorno de 25 hay algún punto de A (el propio punto 25) y algunos puntos que no están en A (por ejemplo el 24 y el 26)."

A partir de esa idea cotidiana apelada aparece el siguiente conflicto cognitivo: *¿Cómo puede un conjunto acotado A tener extremo superior que no sea su máximo?* Antes de la respuesta formal, es conveniente tratar de explicitar una abstracción al ejemplo cotidiano anterior. En Matemática imaginamos los puntos en la recta. Supongamos que los paradores en la carretera son puntos: cada parador tiene longitud nula, se reduce a un solo punto. El último se encuentra exactamente en el kilómetro 35, pero no hay un penúltimo. Los anteriores se encuentran exactamente en los puntos con abscisa 34.90, 34.990, 34.9990, 34.99990, 34.999990, etc. Si ahora se retira el parador (el punto) que estaba exactamente en el kilómetro 35, no existirá un último parador. No hay máximo pero 35 sigue siendo el extremo superior. Tan cerca como se quiera de 35, por abajo o por la izquierda, hay puntos del conjunto. Pero 35 no pertenece al conjunto. Este concepto trasciende a las ideas cotidianas o físicas, ya que los puntos son abstracciones, ideas primitivas, frecuentes en la abstracción matemática. Pero esta abstracción no debe preceder sino proceder de ideas previas cotidianas en la exposición docente, como generalizaciones imaginarias de estas.

Aún así creemos que no alcanza con la exposición del docente de su propia idea cotidiana relacionada con el concepto a definir formalmente. Es necesaria esa construcción reflexiva efectuada intra e interpersonalmente a los alumnos. Podría proponerse el siguiente ejercicio, a realizar en grupos de tres o cuatro estudiantes:

Ejercicio: *Plantear una idea mental proveniente de vivencias cotidianas, que sea una abstracción idealizada de ellas, y apelar a esa idea para explicar constructivamente a otro* *alumno por qué el concepto de extremo superior de un conjunto A de puntos en la recta es diferente del concepto de máximo y del de punto frontera.*

En las clases prácticas con exposición de respuestas o intentos de respuesta al ejercicio anterior entre los estudiantes aparecieron las siguientes dificultades: En primera instancia el alumno se encuentra bloqueado porque intenta responder según lo que cree que el docente espera que responda. Ha sido necesario insistir en la necesidad de explorar intrapersonalmente cuáles son las imágenes mentales, las ideas previas, cotidianas e informales, relacionadas con el concepto presentado científicamente de manera formal. En segunda instancia se ha encontrado resistencia de los alumnos en usar el lenguaje cotidiano en vez de símbolos matemáticos para responder esas preguntas que apelan a los conceptos previos e ideas mentales globalizadoras de lo cotidiano con lo simbólico en una clase de matemática. Esto traduce a nuestro entender la desconexión previa entre la concepción de lo que deberá ser la definición matemática que el estudiante trata de ejemplarizar y el concepto significativo globalizador de su contenido.

3. CONCEPTOS RELATIVOS A SUCESIONES.

Observamos que en la práctica resulta artificial y ajeno, tanto a las ideas abstractas científicas como a las ideas intuitivas previas, introducir el concepto de *sucesión* restringiéndose a sucesiones en la recta. Resulta más amplio y fácil de comprender comenzar por sucesiones en un conjunto cualquiera, por ejemplo como subconjunto numerado de puntos de un plano, que puede ser en el mapa de una región o de una ciudad para fijar ideas. (Catsigeras, 2004). Cuando se introduce, como lo hacen numerosos textos, el concepto de *sucesión* a partir de una fórmula que da un número real a_n en función de un natural n, el estudiante queda atado a esa idea mental y entorpecido para comprender fácilmente en los cursos siguientes, los conceptos topológicos en el plano, en el espacio, o en conjuntos de objetos matemáticos más complicados. Además el concepto matemático de sucesión es uno de esos pocos conceptos para los cuales el significado usual de la palabra en la lengua española es el mismo que el de la definición precisa matemática general. *Sucesión es un conjunto de cosas que se hallan o pasan una después de la otra* (diccionario Kapelusz de la Lengua Española). Definición matemática: *Sucesión es una descripción ordenada, según la ordenación de los números naturales, de elementos de un conjunto no vacío cualquiera A* (en la que se admite repeticiones y ausencias de elementos de A).

Hay una preocupante confusión entre lo que se constituye como información y lo que efectivamente se constituyen en ideas previas para un universo dado de estudiantes. Es necesario distinguirlas. No cualquier información que un estudiante da frente a una pregunta equivale a una idea previa. *"Las ideas previas se refieren a estructuras conceptuales de significados que (los alumnos) atribuyen a un dominio determinado de conocimiento. La práctica educativa, si se la puede llamar constructiva, tiene que ver con el intento de (apelar) a esas ideas previas al respecto de una situación pedagógica propiamente dicha, a propósito de la enseñanza de un contenido conceptual. El apelar a las ideas previas independientemente del proceso de aprendizaje de un concepto científico, carece totalmente de sentido"*(Castorina, citado en Bixio, 1995) Es imprescindible cambiar la práctica, que se ha arraigado entre muchos docentes, de relevar "ideas previas" para luego trabajar en el aula con la estrategia usual desaprovechando el trabajar desde y con esas ideas previas, haciéndolas sencillamente a un costado.

Sin embargo, como señala también Castorina (Castorina, citado en Bixio, 1995) *"Las ideas previas pueden ser un obstáculo o también pueden ser ideas precursoras"* del concepto científico que se pretende introducir. En la definición matemática abstracta de sucesión las ideas cotidianas son precursoras, y el docente debe estar preparado para trabajar constructivamente desde ese nivel. Por otro lado, y como muestra el siguiente ejemplo, algunas otras ideas previas en el concepto de sucesión constituyen obstáculos.

Algunos estudiantes creen erróneamente que dando suficientes términos de la sucesión (pero sólo una cantidad finita de ellos) quedan determinados los siguientes. Eso es falso, pero está fortalecido por el formato de algunos tests psicológicos y los ejercicios escolares que realizaron desde tempranas edades. Es necesario mostrar que *sucesión* no es lo mismo que *comportamiento periódico o regular según una fórmula.* Es necesario describir, aunque no sea mejor que "aleatoriamente", la ley de construcción de todos los infinitos términos de la sucesión, y no solo de una cantidad finita de ellos. En la matemática actual tienen especial relevancia aquellas sucesiones de puntos que aparentan ser periódicas pero que, si se avanza lo suficiente en el tiempo, muestran que difieren mucho de continuar siendo aproximadamente periódicas en el futuro. Estas sucesiones aparecen naturalmente al estudiar fenómenos físicos, soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales y sistemas deterministas caóticos (Catsigeras, 2001).

Por otra parte la idea errónea de que dando 3, 10 o 25 términos de una sucesión se puede responder de una única manera correcta a la pregunta de cuál es el siguiente término, provoca que el estudiante no comprenda fácilmente el *principio de inducción completa,* entre otros conceptos necesarios para el Cálculo.

Pasaremos al análisis de otro de los conflictos cognitivos en el concepto de sucesión. Apelaremos a consultas efectuadas durante el curso de Cálculo mediante el foro público en internet de esa asignatura. La idea intuitiva pero precisa de límite de una sucesión es la siguiente: *En el paso n el término de la sucesión, y todos los que le siguen, van a encontrarse tan cerca como se desee de su límite.* La idea previa errónea es que la única manera de tener convergencia de una sucesión, el único modo de acercarse al límite, es finalmente avanzando hacia él de forma que en cada paso se esté más cerca del límite que en el paso anterior. Se cree que la aproximación al límite debe mejorar de un paso al siguiente, y que si esto no sucediera entonces la sucesión no podría ser convergente. Quizás ese concepto previo provenga de que cuando uno se dirige a un lugar caminando, lo hace generalmente dando todos sus pasos siempre hacia delante, estando en cada uno más cerca de la meta que en el anterior. No lo hace usualmente, por ejemplo, avanzando tres pasos para el frente y dos para atrás. Es cuestión de ver que si lo hiciera igual llegaría a su meta, aunque demoraría más. El estudiante descarta equivocadamente el acercamiento al límite con sucesivos avances y retrocesos. Cree erróneamente que infinitos avances y retrocesos significan la oscilación permanente y la inexistencia de límite.

Pregunta de un estudiante: *En el parcial figura como respuesta que es falso que toda sucesión convergente sea monótona. Creo que es verdadera. ¿No se equivocaron en la respuesta?*

(A) Respuesta de otro estudiante: *Es falso, porque la sucesión* $(-1)^n /n$ *no es monótona y tiende a cero.*

(B) Respuesta de otro estudiante: *Es falso pero sería cierto si además supieras que la sucesión tiende a cero por la izquierda o por la derecha.*

Respuesta del docente: *La respuesta (A) es correcta y está precisamente bien justificada con el contraejemplo. La última parte de la respuesta (B) es incorrecta. Se puede aproximar al límite siempre por la izquierda, con sucesivos avances y retrocesos, con tal que los retrocesos sean menores que los avances. Contraejemplo:* $a_n = 1 / (1+ n + (-1)^n)$.

El concepto previo aunque equivocado es *persistente.* Cuesta convencer al estudiante de su falsedad. Aunque el alumno reconoce haber entendido el contraejemplo, no resulta fácil que asimile significativamente la afirmación de que *no toda sucesión convergente es necesariamente monótona.* La persistencia de las ideas previas está señalada por autores de las teorías de cambio conceptual en el aprendizaje. Comenta Pozo: "*Tomando uno de los tantos términos que delimitan el concepto diremos que las ideas previas o espontáneas surgen de la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción con el entorno. Sirven entre otras cosas para predecir ese entorno*" (Pozo, 1999) Este es uno de los motivos que hace a las ideas previas resistentes al cambio.

Volviendo al ejemplo de las sucesiones convergentes no monótonas, la resistencia al cambio de los conceptos previos provoca que no alcance, para lograr el cambio conceptual, que el docente o los pares del alumno apelen a argumentos lógicos formales (contraejemplos con fórmulas) a partir de la definición matemática de límite. Es necesario lograr el cambio de las ideas cotidianas primero, con nuevas ideas cotidianas que la complementen o mejoren.

Respuesta complementaria del docente*: Se puede aproximar siempre por el sur al punto A del Ecuador, sin alcanzarlo nunca, caminando tres pasos hacia el norte, dos hacia el sur, y así sucesivamente tres hacia el norte, dos hacia el sur, cada vez pasos más cortos de modo de no alcanzar nunca al punto A pero de aproximarse a él, como límite en infinitos pasos.*

Para lograr el aprendizaje constructivo de los conceptos de matemática, es importante desarrollar el proceso de enseñanza *en forma colectiva,* con la participación de más de un estudiante y sus intentos de resolución o respuesta. Al respecto Bruner aporta a este análisis las siguientes reflexiones relativas al aprendizaje significativo: "*Los sistemas que los individuos utilizaban al construir el significado eran sistemas que estaban ya en su sitio, profundamente arraigados en el lenguaje y en la cultura. Constituían un tipo muy especial de juego de herramientas comunal, cuyos utensilios, una vez utilizados, hacían del usuario un reflejo de la comunidad*". (Bruner, 1990)

4. EL CONCEPTO DE FUNCIÓN.

Mayoritariamente, la idea previa con la que el alumno ingresa respecto al concepto de función, es el de una fórmula, usando funciones racionales, algebraicas o trascendentes definidas en los últimos años del liceo. Transformar ese concepto en el científicamente más amplio no es fácil, pues no alcanza usualmente con la definición matemática siguiente:

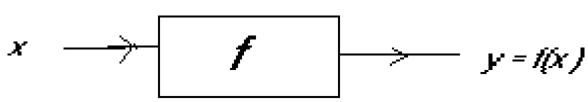
(2) Definición: *Función $f : D \rightarrow C$ es una terna dada por un conjunto no vacío D llamado dominio, otro conjunto no vacío C llamado codominio y una correspondencia tal que a cada elemento del dominio hace corresponder uno y solo uno del codominio.*

Retomamos la siguiente observación: "*Una nueva concepción no va a reemplazar a una antigua, por lo general mientras esta no se encuentre con dificultades y una concepción nueva e inicialmente verosímil sea potencialmente capaz de resolver estas dificultades*." (Posner y cols., 1988)

El concepto previo, en el caso de función real, no proviene de las vivencias cotidianas extra-escolares del alumno sino justamente de la escolarización previa, debido entre otras razones al interés e insistencia de nuestros cursos de Matemática secundaria en el estudio mecanicista analítico de representaciones gráficas de funciones dadas solo por fórmulas con funciones tipo. No decimos que esté mal esa insistencia, porque asienta en el alumno un concepto de función, que aunque restringido, sirve de base para la generalización de la definición (2). Para fijar ideas exponemos un ejemplo que evidencie al alumno la insatisfacción de ese concepto previo y que justifique y muestre la verosimilitud y la potencialidad de la definición matemática (2).

Ejemplo: Consideremos un aparato f (usemos la letra f de función), por ejemplo un amplificador de audio, que consiste *en una caja con una puerta de entrada y una puerta de salida.* El amplificador de audio funciona del siguiente modo:

- Cada señal de audio *que aparezca a la entrada "x" produce una señal "y" a la salida*.
- El *conjunto dominio D* es el conjunto de todos los valores de las señales a la entrada. El *conjunto codominio C* es un conjunto entre cuyos elementos estarán los valores a la salida.
- La correspondencia dada por la función es aquella que dice, (explícitamente o no, a través de una fórmula o no), cuál es la única señal de salida *"y= f(x) "* que corresponde a cada señal de entrada *"x"*.



Se busca de esta manera, como se dijo, provocar aprendizajes significativos en los estudiantes. "La teoría de Ausubel sobre el aprendizaje significativo supone en primer lugar una teoría acerca del cambio cognitivo por reestructuración. Desde este punto de vista el aprendizaje tiene que ver con la incorporación a la estructura cognitiva del alumno de un cuerpo de conocimientos organizados. La condición más importante para que el aprendizaje sea significativo es que el mismo pueda relacionarse, de modo no arbitrario y sustancial, con lo que el alumno ya sabe.” (Ausubel y cols., 1976)

Sin embargo, insistimos en lo expuesto en las secciones anteriores: “*La experiencia física es una condición necesaria pero no suficiente para que se produzca el aprendizaje* “ (Gallager y Reid, 1981, citado en Pozo, 1999). Desde ese punto de vista concluimos que, más allá de apelar a ideas previas, cotidianas o no, para introducir una definición siempre la formulación precisa científica debe ser explícita en términos simbólicos exactos. En particular la definición matemática de función, la definición (2), deberá ser expuesta en las clases y no sustituida por el ejemplo ilustrativo que se utilice para comprenderla.

Por otra parte, observamos la inexistencia de conflicto cognitivo estricto entre la definición (2), el ejemplo del amplificador y las ideas previas de función provenientes de la escolarización anterior del alumno. La definición (2) es meramente la ampliación de las ideas previas y no presenta, desde el punto de vista estricto matemático, una contradicción con las ideas cotidianas y previas, sino una reafirmación de estas y su generalización abstracta.

5. EL CONCEPTO DE CONTINUIDAD.

Resulta difícil el aprendizaje significativo del concepto de continuidad de una función, principalmente por la falta de inteligibilidad para el alumno de la primera de los siguientes enunciados matemáticos precisos:

(3) Definición: *Un función $f\colon D \rightarrow C$ es continua en el punto a del dominio D si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (llamado módulo de continuidad) tal que: $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ si $|x-a| < \delta$*

(4) Definición: *Una función $f\colon D \rightarrow C$ es continua si lo es en todos los puntos de su dominio D.*

(5) Observación: *Si el dominio está formado por dos intervalos disjuntos, la función puede ser continua aunque su trazo en la representación gráfica no pueda realizarse sin levantar el lápiz.*

Aparece el siguiente conflicto, planteado como consulta de un estudiante:

Pregunta de un alumno:

- *¿Cómo puede la función $f(x) = 1/x$ ser continua si cuando x tiende a cero f tiende a infinito?*

Respuesta de otro alumno:

- *Esa función es continua en todos los puntos excepto en cero.*

Primera respuesta del docente:

- *Una función es continua cuando lo es en todos los puntos del dominio. El cero no está en el dominio de la función.*

Las condiciones del cambio conceptual, según Posner y cols., ilustradas en el ejemplo que estamos tratando son las siguientes: (Posner y cols., 1988)

1. Insatisfacción con las concepciones existentes.
2. Inteligibilidad para el sujeto de la nueva concepción.
3. Verosimilitud de la nueva concepción con la previa.
4. Capacidad explicativa y de extensión de la nueva concepción: tiene que ser fructífera.

Sin embargo, se muestra que, para ser verosímil y productivo el nuevo concepto de continuidad de una función, introducido a partir del conflicto cognitivo del ejemplo que estamos tratando, ha sido necesaria la confirmación de ciertas conclusiones:

Pregunta de otro estudiante después de las aclaraciones del docente:

- *Entonces ¿la misma función $f(x) = 1/x$, si se la define como $f(0) = 1$, deja de ser continua?*

Respuesta del docente:

- *Está bien tu conclusión aunque es imprecisa. La función nueva no es la misma función que antes: cambió su dominio. La de antes era continua y la nueva no.*

Según Ausubel, en relación con *el proceso de adquisición* los polos son el *aprendizaje por recepción* y el *aprendizaje por descubrimiento*. Es importante aclarar que el mismo Ausubel expone que "*los tipos de aprendizaje no son categorías dicotómicas sino que forman polos de un continuo.*" De acuerdo con estas formulaciones de la teoría del aprendizaje significativo la definición (3) presenta un paradigma. Es usualmente repetido el concepto de continuidad de una función en un punto, tanto por estudiantes como por docentes, verbalmente y desestructuradamente, a lo sumo relacionándolo con propiedades de la gráfica de la función y con símbolos de implicación lógica. Pero creemos que puede no ser significativamente comprendido, entre otros motivos porque queda desconectado de ideas previas intuitivas y cotidianas. Volviendo al ejemplo de función como un aparato formado por una caja con una puerta donde entra la variable "x" y otra puerta por donde sale variable "y", ilustramos la idea conceptual de continuidad del siguiente modo:

- Hay un valor deseado a la salida Y_0 para el cual la entrada debería ser exactamente X_0. Es decir $f(X_0) = Y_0$ Pero, ni la variable de entrada ni la de salida pueden ajustarse a valores exactos siempre, sino que hay errores, imprecisiones que hacen que el valor de X sea aproximadamente, pero no necesariamente igual a X_0, y por lo tanto el valor de la salida $Y = f(X)$ sea aproximadamente, pero no necesariamente igual a $Y_0 = f(X_0)$.
- El técnico de mantenimiento del aparato debe satisfacer al cliente. El cliente evalúa cómo funciona la caja observando únicamente lo que sucede en la variable a la salida Y. El técnico acondiciona el aparato de modo de satisfacer la demanda del cliente, ajustando únicamente la variable de entrada X.
- El cliente demanda que sea $Y = Y_0$, pero admite que la igualdad no se cumpla exactamente sino con un margen de error especificado máximo $\varepsilon > 0$: $|Y - Y_0| < \varepsilon$.
- El técnico entonces ajusta la variable de entrada, pero no puede siempre ajustarla de modo que $X = X_0$ exactamente. Se admite una tolerancia de variación a la entrada $\delta>0$: $|X - X_0| < \delta$.
- Finalmente el técnico debe ajustar la entrada con una variación delta adecuada, que depende del margen de error épsilon que le dio el cliente para la salida, de forma que valga la siguiente premisa: $|X - X_0| < \delta$ IMPLICA $|Y - Y_0| < \varepsilon$. Significa que se ajusta la entrada con una variación adecuada para satisfacer la demanda del cliente a la salida.

Al lograr el aprendizaje del concepto de continuidad relacionado con la actividad cotidiana del sujeto, el nuevo concepto aprendido tiene ciertas características que espontáneamente no tiene, si en forma aislada se presenta la definición científica formal: Los conceptos previos o espontáneos surgen en la actividad cotidiana del sujeto en un proceso de interacción espontáneo con el entorno y sirven entre cosas para predecir este entorno.(Pozo, 1999) Entre las características más relevantes de este tipo de conceptos se han señalado las siguientes: (Pozo, 1993)

1. Se organizan en forma de teorías en acción o implícitas. 2. Tienen una función explicativa. 3. Al originarse en la actividad espontánea y estar organizadas en teorías resultan muy resistentes al cambio. El origen de su persistencia ha sido explicado además por su utilidad y alta predictibilidad en la vida cotidiana.

La persistencia de las ideas previas cotidianas tiene una ventaja y una desventaja. La ventaja es que logra una retención significativa duradera. La desventaja ocurre cuando el ejemplo cotidiano apelado no se ajusta con precisión al concepto científico que se pretende ilustrar. Suele quedar retenido en ese caso la idea previa cotidiana persistente, que tapa o convive en forma aislada de la idea científica con la cual no coincide. Resultaría en esas condiciones más difícil el cambio conceptual para aprender la idea científica que el cambio mental de esta idea para adaptarse a la idea cotidiana.

REFLEXIONES FINALES

Cuando el alumno ingresa a la universidad -entre los conceptos previos a los que creemos necesario apelar para transformar y presentar los nuevos conceptos científicos- están tanto aquellos originados en la vida cotidiana por fuera del ámbito académico como los adquiridos durante la escolarización previa. Es necesario vincular los nuevos conceptos a las quizás disímiles ideas previas: las de la vida cotidiana y las provenientes de la escolarización anterior.

En los conceptos trabajados en el curso de Cálculo del primer semestre de la Facultad de Ingeniería se hace una fuerte apuesta al trabajo de los estudiantes, enfatizando como señala Astolfi que "es el alumno el que aprende, con ayuda de sus representaciones mentales disponibles y nadie puede reemplazarlo en este proceso. (...)"tomar en serio los saberes es más bien interesarse por las condiciones que hacen posible su construcción por parte de los alumnos, que por el rigor formal de su presentación." (Astolfi, citado en Ausubel, 2002)

Concebimos el aprendizaje como un complejo proceso personal de reorganización cognitiva, donde las contradicciones o los conflictos cognitivos actúan como motores del aprendizaje. Las relaciones sociales potencian el aprendizaje en la medida que produzcan contradicciones en la estructura cognitiva de los sujetos e incidan positivamente en los procesos motivacionales de los sujetos del grupo (Míguez, 2001).

"La concepción del sujeto aprendiente impregna el modo en que los docentes establecen el vínculo con los estudiantes, al cual se le otorga un rol central en el proceso educativo. Este vínculo tiene un peso fundamental y nuclear, entendiendo que el sujeto de la educación es el alumno y el profesor en relación, a través o mediado por el contenido." (Freire y Pampliega, citado en Míguez y Curione, 2004)

CONCLUSIONES

El presente trabajo muestra algunos ejemplos concretos mediante los cuales es posible visualizar la construcción de una didáctica específica de la matemática, en particular un modo de abordar desde un enfoque constructivista la enseñanza de algunos de los conceptos trabajados en el curso de Cálculo 1 dirigido a estudiantes que inician su carrera como ingenieros. Enseñar Matemática es interesarse por las condiciones que hacen posible su construcción por parte de los alumnos, y no sólo por el rigor formal de su presentación. Aunque la presentación formal rigurosa es ineludible en la enseñanza de la Matemática actual, debe esta proseguir a la presentación constructivista de los conceptos involucrados.

Sobre la base de los ejemplos trabajados en esta investigación, en términos generales, encontramos que si el docente se limita a exponer formalmente conceptos y relaciones entre estos, los estudiantes tienden a memorizar mecánicamente. Como forma alternativa, se trabajó con las ideas previas de los estudiantes. Resultó fundamental que el docente apelara a ideas globalizadoras y a una reflexión constructiva, previo a la presentación de las definiciones. Esto es un paso importante, pero no sustituye la necesaria reconstrucción que el estudiante debe realizar, estableciendo relaciones con sus ideas cotidianas. Sin embargo, se evidenció una gran persistencia de las ideas previas vinculadas a algunos conceptos en particular, el de sucesión.

Es importante destacar que se ha encontrado una importante resistencia de parte de los estudiantes a emplear el lenguaje cotidiano en lugar del simbolismo matemático, aspecto que se recomienda debe trabajarse explícitamente en el aula por parte del docente, desde una estrategia didáctica centrada en la búsqueda de aprendizajes significativos.

Aunque la presentación formal rigurosa es ineludible en la enseñanza de la Matemática actual, debe integrarse a una presentación constructivista de los conceptos involucrados.

El enfoque centrado en el conflicto cognitivo ha mostrado ser muy fructífero creemos fundamental seguir profundizando en el diseño de estrategias de enseñanza específicas para el aprendizaje significativo de la matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

Ausubel, D., Novak, J. & H. Hanesian (1976) *Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo*, Trillas, México, 1987.

Ausubel, D: *Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva.* Paidós. Barcelona, 2002.

Bixio, C: *Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica.* Revista Aula Hoy, Nº 2, 1995

Bruner, J: *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Ed. Alianza. Madrid, 1990.

Catsigeras, E: *Elementos de topología usados en Cálculo. Parte I Espacios métricos. Parte II. Sucesiones. Notas para el curso de Cálculo 1.* IMERL. Facultad de Ingeniería. Universidad de la República. Montevideo, 2004.

Catsigeras, E: *La teoría matemática del caos determinista.* Preprint del IMERL, Universidad de la República. Artículo de divulgación presentado en la Mesa Interdisciplinaria del XIV Congreso Latinoamericano de Psicoterapia. Publicado en la revista Lapzus de Cultura, No. 2- pp 22-28. Montevideo, 2001.

Catsigeras, E: *Microexperiencia de enseñanza en Cálculo.* Publicado en las Actas del II Congreso de Enseñanza, ponencia 1-033 editado en CD– UEFI, Fac. de Ingeniería, Universidad de la República. Montevideo, 2004.

Míguez, M. Tesis de Maestría en Química or.Educación. Facultad de Química, Universidad de la República, 2001.

Miguez, M; Curione, K: *Aprendizaje de las Ciencias.* Notas del curso de Formación Docente UEFI, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República Montevideo, 2004.

Piaget, J; García, R: *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Ed. Siglo XXI, México, 1982.

Posner, J; Strike, K; Hewson, P; Gertzog, W: *Acomodación de un concepto científico: Hacia una teoría del cambio conceptual.* (año 1988). En Porlan, R &cols (editores) *Constructivismo y enseñanza de las ciencias*. Diada. Sevilla, 2000.

Pozo, I: *Teorías cognitivas del aprendizaje.* Morata, Madrid, 1993.

Pozo,I. (1999) *Aprender y enseñar ciencia* Ed. Morata, Madrid.[5] Carretero, M: *Aprendizaje y desarrollo cognitivo. Un ejemplo del tratado el inútil combate.* Artículo Publicado en el libro *Actividad humana y procesos cognitivos.* Editor J. Mayor, pp 145-160. Alambra. Madrid, 1985

Vigotsky, L: *Génesis de las funciones psíquicas superiores.* (año 1931). Obras escogidas III. Visor. Madrid, 1982.