

**CICLOS LIMITES EN UN  
MÓDELO DE SISTEMA BINEURONAL**

**Eleonora Catsigeras**

**Tesis de Maestría en Matemática  
Orientador: Prof. Jorge Lawowicz**

**Facultad de Humanidades y Ciencias  
Montevideo, octubre de 1990**

## NOTA

En esta tesis se estudia el comportamiento asintótico y la estabilidad de un modelo de sistema nervioso, con dos neuronas. El modelo consiste en un sistema dinámico discontinuo y no lineal en el toro bidimensional. Está motivado en el trabajo de investigación en redes neuronales que desarrolla, entre otros, el Prof. R. Budelli de la Facultad de Medicina, a quien se debe el planteo de los problemas matemáticos que aquí se desarrollan.

Se aplica la teoría matemática conocida para el estudio de los sistemas continuos y diferenciables en el círculo, (número de rotación, teoría de Denjoy-Schwartz y difeomorfismos del tipo Morse-Smale), siendo original el procedimiento de regularización del sistema discontinuo, para que sea aplicable tal teoría, y la interpretación, para el sistema bineuronal, de los resultados obtenidos de ella.

Eleonora Catsigeras

Setiembre de 1990

# CICLOS LIMITES EN UN MODELO DE SISTEMA BINEURONAL

## INDICE

INTRODUCCION	1
1 DESCRIPCION DEL MODELO	2
1.1 SISTEMA BINEURONAL SIN SINAPISIS	2
1.2 SISTEMA BINEURONAL CON SINAPISIS	3
1.3 DEFINICIONES	5
1.4 RESULTADOS OBTENIDOS	6
2 CONSTRUCCION DE UNA TRANSFORMACION DE POINCARÉ	7
2.1 LEMAS	7
2.2 REGULARIZACION DEL SISTEMA NO INHIBITORIO	10
2.3 DISCUSION SEGUN EL NUMERO DE ROTACION	14
2.4 TRANSFORMACION DE REGRESO PARA SISTEMAS INHIBITORIOS	15
2.5 REGULARIZACION DE LOS SISTEMAS INHIBITORIOS	17
3 ESTABILIDAD	21
3.1 DEPENDENCIA DE LA TRANSFORMACION DE POINCARÉ COMO FUNCION DE LOS PARAMETROS	21
3.2 SISTEMAS BINEURONALES DE TIPO MORSE SMALE	25
3.3 SISTEMAS CON UN UNICO CICLO LIMITE	26
4 DINAMICA SIMBOLICA	29
4.1 DEFINICIONES	29
4.2 CODIGOS PERIODICOS	30
4.3 EJEMPLOS Y OBSERVACIONES	33
4.4 ESTABILIDAD DE LOS CODIGOS PERIODICOS	35
4.5 CONCLUSION	36
REFERENCIAS	37



## INTRODUCCION

Un sistema biológico de dos neuronas es estudiado matemáticamente tomando el modelo de [9]: un sistema dinámico no lineal con discontinuidades, en un toro bidimensional. Estudiaremos este modelo asumiendo que los saltos, donde hay discontinuidades, son relativamente pequeños.

El modelo interpreta al sistema de dos neuronas como dos osciladores, que intercambian entre sí pulsos de amplitud pequeña. Esa vinculación entre los dos osciladores se debe al proceso biológico llamado *sinapsis*. Según sea el signo de estos pulsos, la sinapsis se denomina *excitatoria*, *inhibitoria*, o *combinada*. Son estos pulsos los que provocan discontinuidades en el estado del sistema, como se detallará en la sección 1.

Nuestro objetivo es estudiar el comportamiento asintótico, en el futuro, del estado del sistema bineuronal, y su dependencia de las condiciones iniciales y de los parámetros del sistema. El comportamiento asintótico se estudia en la sección 2. Se obtienen órbitas periódicas que atraen a todas las otras, cuando la sinapsis no es inhibitoria; y dos posibles comportamientos, cuando la sinapsis es inhibitoria: o bien hay órbitas periódicas que atraen a las otras, o bien existe un conjunto invariante compacto, no periódico, atractor.

En la sección 3 se estudia la dependencia de los parámetros del sistema, y en la sección 4 la dinámica en el espacio de las sucesiones binarias, definida por las sucesivas descargas de una u otra neurona. Es precisamente la observación de estas sucesiones, lo que se utiliza para clasificar los sistemas neuronales, en los experimentos biológicos.

Para una familia abierta de sistemas, (incluyendo aquellos con sinapsis excitatoria), se obtendrá un único ciclo límite, y un solo código binario. Estos sistemas exhiben un comportamiento periódico, pero también la capacidad de compensar cualquier diferencia inicial de fase.

En el caso de sinapsis no inhibitoria, obtendremos genericidad (en sentido topológico) de la conducta siguiente: existencia de un número finito de ciclos límites, y existencia a lo sumo de dos códigos binarios definidos por las sucesiones de descargas de las neuronas. También estudiaremos la estabilidad (persistencia) de este comportamiento, concluyendo que hay una cantidad numerable de clases de sistemas con iguales códigos binarios, y que la clasificación, genéricamente, es robusta (no cambian los códigos cuando se alteran levemente los parámetros del sistema).

# 1 DESCRIPCIÓN DEL MODELO

## 1.1 SISTEMAS BINEURONALES SIN SINAPSIS

Una neurona  $i$  actúa como un oscilador. Su estado está descrito por una variable  $x$ , con valores en un intervalo cerrado  $[-V, 1]$ , que crece en el tiempo de acuerdo a la ecuación diferencial:  $dx/dt = u_i(x)$ , donde  $u_i: [-V, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , positiva, y con derivada negativa.

Cuando el estado de la neurona alcanza un nivel de umbral superior, normalizado en 1 (siempre lo alcanza porque  $u_i$  es positiva en el intervalo cerrado), la variable de estado decrece abruptamente a 0. Este fenómeno será llamado *descarga* de la neurona  $i$ .

En la figura 1 se representa  $x(t)$  para  $t \geq 0$ .

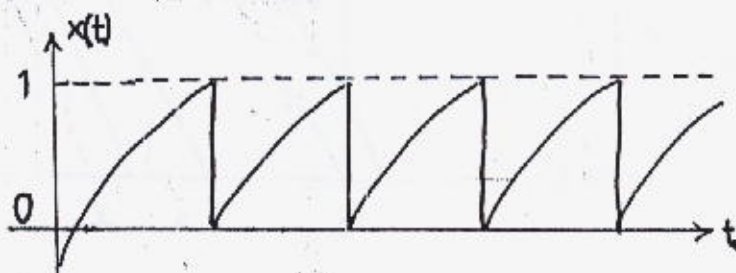


Fig.1

Después de la primera descarga, el estado de la neurona puede ser descrito por un punto en el círculo  $S^1$  (identificando el estado 0 con el estado 1).

Si dos neuronas no interactúan, el sistema está descrito por su dinámica producto en el toro bidimensional:

$$T^2 = S^1 \times S^1$$

Es condición necesaria y suficiente para que ambos osciladores tengan un período común, que el cociente de los dos períodos sea racional. Si no lo es, todas las órbitas son densas en el toro. Pero, aún cuando exista un período común de oscilación, el sistema no es capaz de corregir la diferencia inicial de fases.



## 1.2 SISTEMA BINEURONAL CON SINAPISIS

La interacción mutua entre las neuronas se produce por la actividad biológica llamada *sinapsis*. Cuando alguna neurona de una red alcanza su nivel de umbral superior, un cambio brusco se produce en el estado de las otras. Este cambio depende de qué neurona lo ha provocado, y del estado de las otras en ese instante.

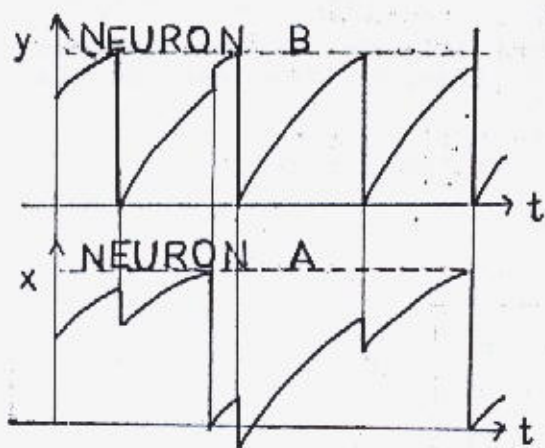


Fig. 2

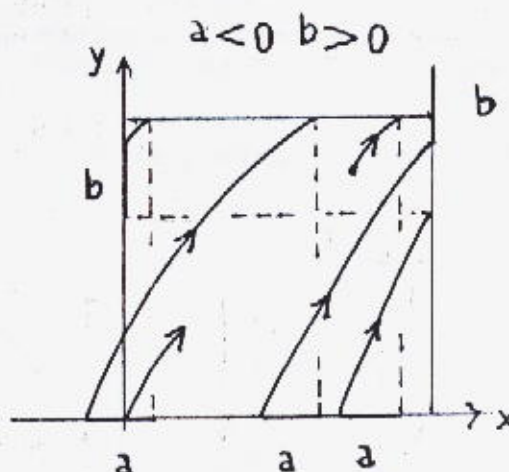


Fig. 3

Para sistemas de dos neuronas, la sinapsis es *excitatoria* si la descarga de cualquiera de ellas produce un salto positivo en el estado de la otra. Similarmente, si la descarga de una cualquiera produce un salto negativo en la otra, la sinapsis es llamada *inhibitoria*.

Cuando las descargas de una neurona producen saltos negativos en la otra, y las descargas de la segunda saltos positivos en la primera, la sinapsis es llamada *inhibitoria-excitatoria*.

En las figuras 2 y 3 se muestran las dos variables  $(x,y)$ , que describen el estado de un sistema bineuronal con sinapsis inhibitoria-excitatoria.

Si el salto positivo debido a la descarga de la neurona "A", provoca que "B" supere su umbral superior, ambas neuronas van simultáneamente al nivel 0. Por otra parte, los saltos negativos en el estado de "A", debido a las descargas de "B", pueden llevar el estado de "A" a valores por abajo de cero. Pero la amplitud de esos saltos se supone pequeña, de modo que el estado de la neurona se mantenga siempre por arriba de su umbral inferior negativo  $-V_A$ , y además, el estado del sistema entre en el cuadrante positivo de  $\mathbb{R}^2$ . Estas hipótesis están tomadas del modelo en [9].

Para un sistema de dos neuronas, la ley de sinapsis es una función:

$$f: \left\{ (x,y) \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1] : x=1 \text{ ó } y=1 \right\} \rightarrow \left\{ x=0 \text{ ó } y=0 \right\}$$

definida por:

$$f(x,1) = (x + a(x), 0) \quad ; \quad f(1,y) = (0, y + b(y))$$

(para todo  $(x,y)$  tal que  $0 \leq x \leq 1$ ,  $x+a(x) \leq 1$ ,  $0 \leq y < 1$ ,  $y+b(y) \leq 1$ ).

$$f(x,1) = (0,0) \text{ ó } f(1,y) = (0,0) \\ (\text{si } x+a(x) > 1 \text{ o si } y+b(y) > 1, \text{ resp.}).$$

donde  $a$  y  $b$  (los saltos) son funciones definidas en los intervalos cerrados  $[-V_A, 1]$  y  $[-V_B, 1]$  respectivamente. Se asumen tales que:

- i) son de clase  $C^2$ .
- ii) ambas tienen signo definido, nunca cero (Los signos de  $a$  y  $b$  son  $++$ ,  $--$ , ó  $-+$ , de acuerdo a si la sinapsis es excitatoria, inhibitoria o combinada).
- iii) suficientemente pequeñas en la topología  $C^1$ , de modo que:
  - \*  $x + a(x)$ ,  $y + b(y)$  son estrictamente crecientes.
  - \* con cualquier condición inicial, el sistema alcanza un estado en el cuadrante positivo.
  - \*  $a(x)$  y  $b(y)$  son aprox. constantes (como será detallado en § 2.1).

La dinámica del sistema bineuronal es una función  $\psi(p,t)$  que para cada condición inicial  $p \in [V_A, 1] \times [V_B, 1]$ , y para cada  $t \geq 0$ , da el estado del sistema en el tiempo  $t$ .

$\psi(p,t)$  es discontinua cuando alcanza al conjunto

$$\left\{ x=1 \text{ ó } y=1 \right\}.$$

Sus discontinuidades están dadas por la ley de sinapsis  $f$ :

$$\psi(p, t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \psi(p, t) = q \in \left\{ x=1 \text{ ó } y=1 \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0^+} \psi(p, t) = f(q).$$

( $f$  está definida, como se dijo antes, por las funciones de salto  $a(x)$  and  $b(y)$ , dadas).



Nótese que  $\psi(p, t)$  no es necesariamente inyectiva, para cada  $t \geq 0$  fijo. Por ejemplo, si la función  $b$  es positiva, y si

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} \psi(p, t) = \left\{ (1, y) : y + b(y) \geq 1 \right\}$$

entonces  $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \psi(p, t) = (0, 0)$ .

### 13 DEFINICIONES

Un sistema bineuronal está determinado por cuatro funciones reales de clase  $C^2$   $(u_1, u_2, \alpha, b)$ , definidas en intervalos cerrados, y que verifican las condiciones descritas previamente. ( $u_1$  y  $u_2$  positivas y con derivadas negativas, y  $\alpha$  y  $b$  pequeñas con signo definido).

Llamaremos *espacio de sistemas bineuronales*, o *espacio de parámetros*, al espacio topológico  $\mathcal{Y}$  de todas las cuaternas de funciones  $(u_1, u_2, \alpha, b)$ , que verifican las condiciones previamente descritas, con la topología producto de clase  $C^2$ .

Dado un sistema  $\phi$  en  $\mathcal{Y}$ , el objetivo es estudiar el comportamiento asintótico en el futuro de  $\psi(p, t)$ , su dependencia de la condición inicial  $p$ , y del sistema  $\phi$ .

Llamamos *órbita de  $p_0$*  al conjunto:

$$o(p_0) = \left\{ \psi(p_0, t) : \text{para } t \geq 0 \right\},$$

y  $\omega$ -límite de  $p_0$  al conjunto:

$$\omega(p_0) = \left\{ q : \psi(p_0, t_n) \rightarrow q, \text{ para alguna sucesión } t_n \rightarrow +\infty \right\}.$$

La órbita de  $p$  es *periódica* si  $\psi(p, t) = p$  para algún  $t > 0$ .

Una órbita periódica es un *ciclo límite* si es el  $\omega$ -límite de las órbitas con condición inicial en un abierto del rectángulo  $[V_A, 1] \times [V_B, 1]$ .

Una órbita periódica  $o(p)$  de un sistema  $\phi$  es *persistente* si, dado  $\epsilon > 0$ , existe un entorno de  $\phi$  en  $\mathcal{Y}$ , tal que cada sistema en ese entorno tiene una órbita periódica con todos sus puntos a distancia menor que  $\epsilon$  de  $o(p)$ . (Significa que la órbita persiste bajo pequeños cambios de los parámetros)



## 1.4 RESULTADOS OBTENIDOS

En la sección 2 demostraremos los siguientes resultados:

### TEOREMAS 1 Y 2:

*Si la sinapsis es no inhibitoria, entonces los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas, para cualquier condición inicial.*

*Si la sinapsis es inhibitoria, entonces, o bien los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas, o bien hay un minimal no trivial que es el  $\omega$ -límite de todas las otras órbitas.*

En la sección 3, para sistemas con sinapsis no inhibitoria, demostraremos lo siguiente:

### TEOREMA 3:

*Genéricamente (es decir, para los sistemas bineuronales de una familia abierta y densa en  $\mathcal{P}$ ), hay solo un número finito de órbitas periódicas persistentes. Estas son los  $\omega$ -límites de todas las otras órbitas. Entonces, tales sistemas exhiben una cantidad finita de ciclos límites.*

### TEOREMA 4:

*Para una familia abierta de sistemas en  $\mathcal{P}$ , incluyendo aquellos con sinapsis excitatoria, hay un único ciclo límite, que es precisamente la órbita por  $(0,0)$ .*

En la sección 4, también para sistemas con sinapsis no inhibitoria, obtendremos:

### TEOREMA 5:

*La sucesión de descargas de las neuronas es eventualmente periódica (es decir, periódica desde un cierto  $t$  mínimo en adelante).*

*Para cada sistema hay dos códigos binarios finitos (pueden coincidir), definidos por las partes periódicas de las sucesiones de descargas (la selección de uno u otro código depende del estado inicial del sistema).*

### COROLARIOS:

*Para sistemas genéricos (según teorema 3), los códigos binarios son persistentes (es decir, no se modifican al perturbar los parámetros del sistema).*

*Para la familia abierta de sistemas del teorema 4, hay un único código binario.*

Como consecuencia, los sistemas bineuronales pueden ser clasificados en una cantidad numerable de clases, de acuerdo a sus códigos binarios, y genéricamente, esta clasificación es robusta (no cambia con pequeñas perturbaciones de los parámetros).

## 2. CONSTRUCCION DE UNA TRANSFORMACION DE POINCARÉ

En esta sección definiremos una transformación de Poincaré asociada al sistema bineuronal, que resultará discontinua. Para estudiarla, modificaremos la dinámica discontinua  $\psi$ , insertando tramos ficticios, que sustituyan los saltos de las órbitas de  $\psi$ . (Se hace notar que, en realidad, estaremos estudiando un nuevo sistema para el cual las descargas de las neuronas no suceden instantáneamente, sino que toman un cierto tiempo positivo).

Más adelante, concluiremos los teoremas enunciados, del análisis de esa transformación de Poincaré.

Primero, se probarán algunas lemas de carácter técnico:

### 2.1 LEMAS

Con las definiciones y notación expuestas en la sección 1:

#### LEMA 2.1.1

Si la función  $a: [-V, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es negativa y suficientemente pequeña (en la topología  $C^1$ ), entonces:

Existen números  $r_0$  y  $r_1$ , tales que:

$$\begin{aligned} 0 < r_0 < r_1 < 1 \\ (0, r_0) &= \psi(a(0), 0, t_0) \\ (1, r_1) &= \psi(1+a(1), 0, t_1) \end{aligned}$$

donde el flujo  $\psi((x, y), t)$  es tangente al campo producto

$$(u_1(x), u_2(y))$$

y  $t_0$  y  $t_1$  son positivos. (Figura 4).

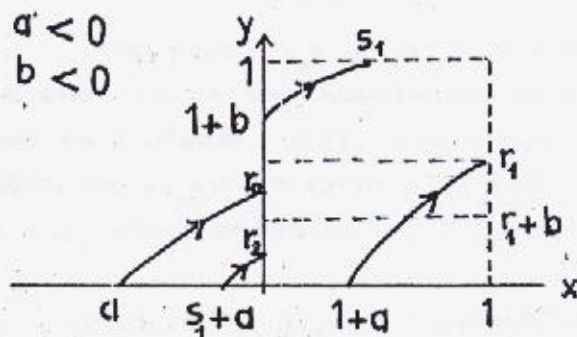


Fig.4



**Pruebas:**

Por definición  $\psi(1,0,0)=(1,0)$  y  $d\psi/dt=(u_1, u_2)$ . Siendo  $u_1 > 0$ ,  $\psi(x,y,t)$  es transversal a las rectas verticales. Por el teorema de la función implícita, existen  $\delta > 0$ ,  $t(x)$  y  $y(x)$  continuas, definidas para  $1-\delta < x \leq 1$ , tales que  $\psi(x,0,t(x))=(1,y(x))$ , con  $t(1)=0$ ,  $y(1)=0$ , y  $0 \leq y(x) < 1$ .

Para  $\alpha$  pequeño, tal que  $1-\delta < 1+\alpha(1) < 1$ , definamos  $t_1 = t(1+\alpha(1))$ , and  $r_1 = y(1+\alpha(1))$ . Entonces, se obtiene:

$$(1, r_1) = \psi(1+\alpha(1), 0, t_1)$$

Análogamente se prueba la existencia de  $r_0$ , para  $\alpha$  suficientemente pequeño.

Ahora probemos que  $r_0 < r_1$ :

$$\int_{\alpha(0)}^0 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_0^{r_0} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_0^{t_0} dt = t_0$$
$$\int_{1+\alpha(1)}^1 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{\alpha(1)}^0 \frac{dx}{u_1(x+1)} = \int_0^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_0^{t_1} dt = t_1$$

Como  $u_1(x)$  es decreciente con  $x$ , si la función  $\alpha$  fuera constante, tendríamos:

$$\int_{\alpha(0)}^0 \frac{dx}{u_1(x)} < \int_{\alpha(1)}^0 \frac{dx}{u_1(x+1)}$$

Entonces:  $t_0 < t_1$  y, como  $u_2$  es positivo:  $r_0 < r_1$ .

La última desigualdad aún es válida, por continuidad, si la función  $\alpha$  es no constante, pero su primera derivada es próxima a cero.

**LEMA 2.1.2**

Si las funciones  $a$  y  $b$  son negativas y suficientemente pequeñas (en la topología  $C^1$ ), entonces:

Existen números  $r_0$ ,  $r_1$  y  $s_1$ , tales que:

- \*  $r_0$  y  $r_1$  son los mismos que en el lema 2.1.1
- \*  $(s_1, 1) = (\psi(0, 1-b(1), T))$  donde  $T$  es positivo.
- \* O bien  $r_1+b(r_1)$ , o bien  $s_1+a(s_1)$ , es positivo.

Adem s: si  $s_1+a(s_1) \leq 0$  entonces  $r_1+b(r_1) > r_2 > 0$ ,

donde  $r_2$  est definido por:

- \*  $(0, r_2) = \psi(s_1+a(s_1), 0, t_2)$ , para  $t_2 > 0$ .

(Véase la figura 4).

Pruebat

Como  $b$  y  $a$  son negativos, el lema 2.1.1 da números positivos  $r_0$ ,  $r_1$  y  $s_1$ . Si  $a$  y  $b$  son pequeños entonces  $s_1 + a(s_1)$  es menor que  $\delta > 0$  dado.

Supongamos que  $s_1 + a(s_1) \leq 0$ . Los mismos argumentos usados en la prueba del lema 2.1.1, muestran la existencia de  $\delta > 0$ , tal que para  $-\delta < x \leq 0$ , está definida  $t(x)$  que verifica:  $\psi(x, 0, t(x)) = (0, y(x))$ , con  $0 \leq y(x) < 1$ . Llamando  $t_2 = t(s_1 + a(s_1))$ , y  $r_2 = y(s_1 + a(s_1))$ , se obtiene:

$$\psi(s_1 + a(s_1), 0, t_2) = (0, r_2), \quad \text{con } 0 \leq r_2 < 1$$

Para completar la prueba, alcanza demostrar que  $r_1 + b(r_1) > r_2$ , para  $a$  y  $b$  pequeños en la topología  $\mathbb{C}^1$ :

Integrando la ecuación diferencial dada

$$\frac{dx}{dt} = u_1(x), \quad \frac{dy}{dt} = u_2(y),$$

y teniendo en cuenta que  $u_1$  y  $u_2$  son estrictamente decrecientes,

$$t_1 = \int_0^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_{s_1 + a(s_1)}^1 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{a(s_1) + s_1}^{s_1} \frac{dx}{u_1(x + 1 - s_1)}, \quad \int_{a(s_1) + s_1}^{s_1} \frac{dx}{u_1(x)} \quad (1)$$

$$T = \int_0^{s_1} \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{s_1 + b(s_1)}^1 \frac{dy}{u_2(y)} = \int_{b(s_1) + r_1}^{r_1} \frac{dy}{u_2(y + 1 - r_1)}, \quad \int_{b(s_1) + r_1}^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} \quad (2)$$

$$t_2 = \int_0^{r_2} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_{s_1 + a(s_1)}^0 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{a(s_1) + s_1}^{s_1} \frac{dx}{u_1(x)} + \int_{s_1}^0 \frac{dx}{u_1(x)}$$

De (2):

$$t_2 = \int_{a(s_1) + s_1}^{s_1} \frac{dx}{u_1(x)} - T \quad (3)$$

Considerando:

$$t^2 = \int_0^{r_1 + b(r_1)} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_0^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} - \int_{b(r_1) + r_1}^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)}$$

de (1):

$$t^2 = t_1 - \int_{b(r_1) + r_1}^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)}, \quad \int_{a(s_1) + s_1}^{s_1} \frac{dx}{u_1(x)} - \int_{b(r_1) + r_1}^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} \quad (4)$$



Si  $a$  y  $b$  son constantes, de (2), (3) y (4) se obtiene  $t^* > t_*$ , y, al ser integrales de  $\frac{1}{u_2(y)} > 0$ , resulta  $r_1 + b(r_1) > r_2$ . Esta desigualdad aún es válida, por continuidad, si  $a$  y  $b$  no son constantes, pero sus primeras derivadas son suficientemente pequeñas.  $\square$

Notas:

En adelante, adoptaremos la convención siguiente:

Si la sinapsis es inhibitoria-excitatoria, entonces  $a$  es negativo y  $b$  es positivo.

Si la sinapsis es inhibitoria (eso es,  $a$  y  $b$  son ambas negativos), entonces  $r_1 + b(r_1) > 0$ , con la notación del lema 2.1.2.

## 2.2 REGULARIZACION DEL SISTEMA NO INHIBITORIO

En los dos párrafos que siguen, supondremos que  $b > 0$ , dejando el caso  $b < 0$  y  $a < 0$  para los párrafos 2.4 y 2.5.

Tomemos en  $\mathbb{R}^2$ , el rectángulo  $[-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$ , en el que está definido el campo vectorial dado  $(u_1, u_2)$ , de clase  $C^2$ . Sea  $k > 1$  un número real tal que  $k + a(0) > 1$ , y definamos en el cuadrado  $[0, k] \times [0, k]$  un campo vectorial  $\chi$ , de clase  $C^2$ , tal que:

(figura 5)

(1)  $\chi(x, y) = (u_1(x), u_2(y))$  si  $0 \leq x \leq 1$  y  $0 \leq y \leq 1$ .

(2): (2.1)  $\chi(k, y) = \chi(0, y)$  para todo  $y \in [0, k]$   
 (2.2)  $\chi(x, k) = \chi(x, 0)$  para todo  $x \in [0, k]$ .

(3): (3.1) La primera componente de  $\chi$  es positiva en  $[0, k] \times [0, 1]$ .  
 (3.2) La segunda componente de  $\chi$  es positiva en  $[0, 1] \times [0, k]$ .

(4) El flujo  $\phi(x, y, t)$  tangente a  $\chi$  verifica:

(4.1)  $\phi(1, y, t_y) = (k, y + b(y))$  para algún  $t_y > 0$ , y todo  $y$  tal que  $y > r_1$  y  $y + b(y) \in (0, 1)$ .

(4.2)  $\phi(x, 1, t_x) = (x + a(x), k)$  para algún  $t_x > 0$ , y todo  $x$  tal que  $x + a(x) \in (0, 1)$ .

(5) Si  $x_0 \in [k + a(0), k]$  entonces el arco de curva  $\phi(x_0, 0, t)$  con  $t \geq 0$ , contenido en  $[1, k] \times [0, k]$ , es tangente a cada punto  $(x, y)$  al campo vectorial  $\chi(x, y) = (u_1(x - k), u_2(y))$ . (Esta condición es aplicable cuando la función  $a$  es negativa).

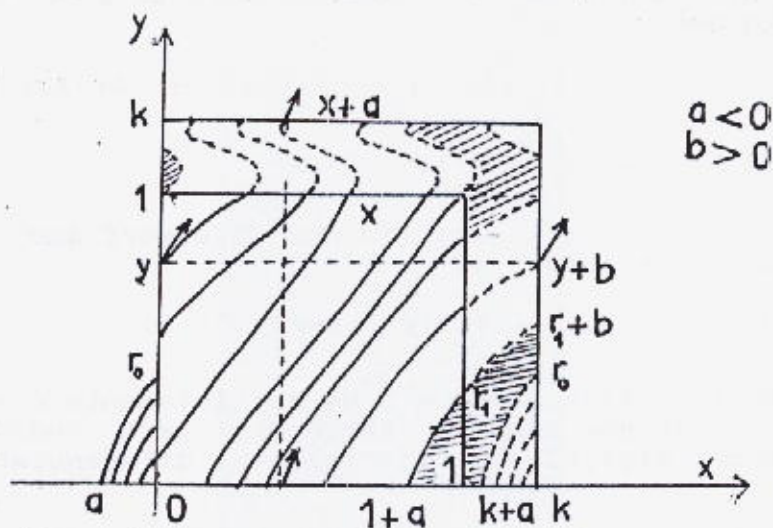


Fig. 5

**LEMA 2.2.1**

Existe un campo vectorial  $\chi$  que verifica las condiciones (1) a (5).

**Pruebas:**

Primero, nótese que si las condiciones (1) a (4) se satisfacen, entonces (5) se obtiene del lema 2.1.1, definiendo  $\phi(x_0, 0, t) = \psi(x_0 - k, 0, t)$ .

Definamos  $\chi$  en  $[0, 1] \times [0, 1]$  mediante la condición (1). Ahora construiremos  $\chi$  en  $[1, k] \times [0, 1]$  de modo que verifique (2.1), (3.1), y (4.1). Una construcción similar debe repetirse para definir, después, a  $\chi$  en  $[0, k] \times [1, k]$ .

Las funciones dadas  $u_1$  y  $u_2$  son positivas, definidas en  $[V_A, 1]$  y  $[V_B, 1]$  resp., y de clase  $C^2$ . Ellas pueden ser extendidas a todo  $\mathbb{R}$ , de forma de obtener funciones positivas, de clase  $C^2$ , y tales que  $u_1(k) = u_1(0)$  y  $u_2(k) = u_2(0)$ .

Sea  $x(t)$  la solución de  $dx/dt = u_1(x)$  con la condición  $x(0) = 1$ . Luego,  $x(t)$  es estrictamente creciente, y  $x(T) = k$  para cierto  $T$  positivo.

Dado  $0 \leq y < 1$ , denotaremos  $v(y, t)$  la solución de  $dv/dt = u_2(v)$ , tal que  $v(y, t) = y$ .



Sea  $\lambda$  una función auxiliar  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$ , no decreciente, de clase  $C^\infty$ , nula en un entorno de 1, y constante igual a 1 en un entorno de  $k$ . Definamos:

$$\phi(1,y,t) = \left( x(t), (1-\lambda(x(t))) \cdot \nu(y,t) + \lambda(x(t)) \cdot \nu(y+b(y), t-T) \right)$$

para  $0 \leq t \leq T$  y todo  $y$  tal que  $0 < r_0 \leq y < 1$ ,  $y+b(y) \leq 1$ .

$\phi(1,y,t)$ , función de  $(y,t)$ , es un difeomorfismo local, porque su determinante jacobiano es

$$u_1(x) \cdot (1-\lambda(x) + \lambda(x)(1+b'(y))) \partial \nu / \partial y > 0.$$

Además, es inyectiva, porque  $x$  es estrictamente creciente con  $t$ , e  $id+b$  y  $\nu$  lo son con  $y$ . Entonces, para todo  $p$  en  $\text{Im}(\phi)$ , se cumple  $p = \phi(1, y(p), t(p))$ , con  $y(p), t(p)$  diferenciables, y puede definirse:

$$\chi(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t(p)} \phi(1, y(p), t), \text{ (para } p \text{ en } \text{Im}(\phi)\text{)}.$$

Tomemos una extensión apropiada, para definir  $\chi$  en las partes de  $[1,k] \times [0,1]$ , donde todavía no está determinada.

$\chi$  es un campo vectorial construido de modo que cumple (2.1) y (4.1). De la definición de  $\phi$  sigue (3.1).  $\square$

#### Definiciones:

Identificando el lado  $x=k$  con el lado  $x=0$ ; y el lado  $y=k$  con el lado  $y=0$ , en el cuadrado  $[0,k] \times [0,k]$ , la construcción anterior define un campo vectorial de clase  $C^2$  en el toro bidimensional  $\mathbb{T}^2$ , cuyo flujo tangente  $\phi$  está relacionado con la dinámica del sistema bineuronal  $\psi$ .

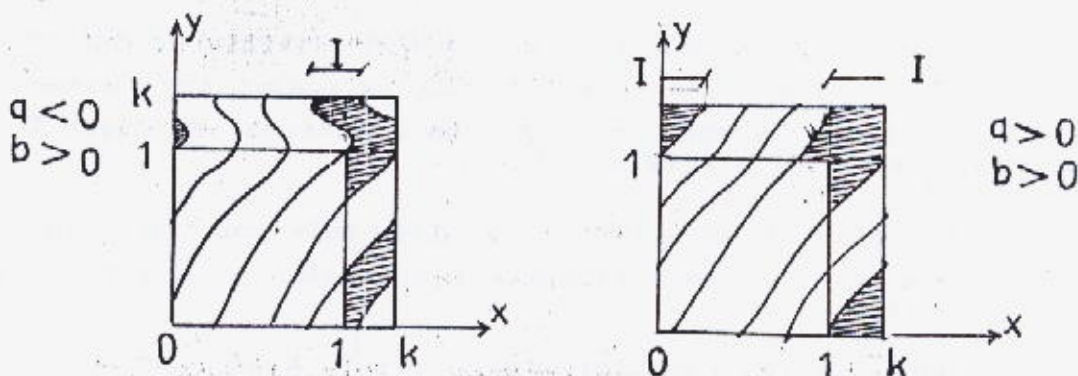


Fig.6

Denotaremos a los puntos de  $\mathbb{T}^2$  como  $p = (x, y)_{\text{mod } k}$ , con  $x$  e  $y$  números reales.

Sea  $I$  el segmento (figura 6):

$$I = \left\{ (x, y)_{\text{mod } k} : y=1; 1+a(1) < x < k+a(0) \right\}, \text{ si la función } a \text{ es negativa;}$$

$$I = \left\{ (x, y)_{\text{mod } k} : y=1; 1 < x < k+a(0) \right\}, \text{ si la función } a \text{ es positiva.}$$

Una órbita  $\omega(p)$  es eventualmente periódica si existe  $T \geq 0$ , tal que la  $\psi$ -órbita de  $\psi(p, T)$  es periódica.

#### LEMA 2.2.2

I) La órbita  $\omega(p)$  del sistema bineuronal est determinada por la órbita  $\phi(p)$  del sistema dinámico continuo en el toro, mientras sta no corta al intervalo  $I$ . Cuando lo hace,  $\omega(p)$  pasa bruscamente al estado  $(0, 0)$ .

II)  $\omega(p)$  es eventualmente periódica si, y solo si, se cumple alguna de las siguientes condiciones:

- (i)  $\phi(p)$  es periódica y no corta al segmento  $I$ .
- (ii)  $\phi(p)$  corta al intervalo  $I$ , y  $\phi(0, 0)$  es periódica y no corta a  $I$ .
- (iii)  $\phi(p)$  corta al intervalo  $I$ , y  $\phi(0, 0)$  también lo hace.

#### Pruebas:

I) sigue de la definición de la ley de sinapsis  $f$  y de la construcción del campo vectorial  $\chi$ , y II) es una consecuencia de I). □

#### Definiciones:

Sea  $S^1$  la circunferencia obtenida al identificar ambos extremos del intervalo  $\{(x, y) : 0 \leq x \leq k, y=0\}$ . Sea  $g(x)$  el primer regreso a  $S^1$  de la órbita  $\phi(x, 0, t)$ . Será llamada transformación (regularizada) de Poincaré del sistema bineuronal. No está unívocamente determinada en toda la circunferencia, a partir del sistema bineuronal dado.

Debido a que por construcción del campo  $\chi$ , y del flujo  $\phi$ , todas las órbitas según  $\phi$  cortan transversalmente a  $S^1$ , se deduce:

- \*  $g$  es un difeomorfismo de clase  $C^2$  en la circunferencia.
- \*  $p \in S^1$  es periódico según  $\phi$  si, y solo si, es periódico según  $g$ .
- \*  $p \in S^1$  tiene una órbita densa en el toro si y solo si la órbita de  $p$  según  $g$  es densa en  $S^1$ .
- \* El  $\omega$ -límite de  $p \in S^1$  según  $\phi$  en el toro, es la unión de las órbitas  $\omega(q)$ , donde  $q \in S^1$  está en el  $\omega$ -límite de  $p$  según  $g$ .



## 2.3 DISCUSION SEGUN EL NUMERO DE ROTACION

La dinámica de los homeomorfismos que preservan la orientación de la circunferencia es estudiada con la conocida teoría del número de rotación, y la teoría de Denjoy-Schwartz ([5] [6]).

Sea  $\tilde{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , un levantamiento a  $\mathbb{R}$  del homeomorfismo  $g$  en la circunferencia, que preserve la orientación. Precisamente:

$$g(e^{2\pi i x}) = \tilde{g}(x), \text{ con } 0 \leq \tilde{g}(0) < 1.$$

Es sabido que para todo  $x \in \mathbb{R}$ , existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{g}^n(x) - x}{n} = \rho(g),$$

y es independiente de  $x$ . Ese real es llamado número de rotación de la transformación  $g$ .

Utilizaremos los siguientes resultados conocidos [1]:

2.3.1) Existen puntos periódicos en la circunferencia si y solo si el número de rotación es racional.

2.3.2) Si  $x$  es periódico y el número de rotación es  $m/n$ , entonces:

$\tilde{g}^n(x) = x + m$  y  $n$  es el periodo de  $x$ . Luego, todas las órbitas periódicas tienen el mismo periodo.

2.3.3)  $\rho(g)$  es racional si y solo si todos los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas.

2.3.4) Si  $\rho(g)$  es irracional, entonces  $g$  es semiconjugado a una rotación  $r$  de ángulo irracional. Es decir, existe una semiconjugación  $\zeta: S^1 \rightarrow S^1$ , no decreciente, sobreyectiva y continua, tal que  $\zeta \circ g = r \circ \zeta$ . (teorema de Poincaré).

Del teorema de Schwartz:

2.3.5) Si  $g$  es un difeomorfismo de clase  $C^2$ , entonces  $\rho(g)$  es irracional si y solo si todas las órbitas son densas en el círculo.

De los lemas anteriores, y de estos resultados, se concluye:

### TEOREMA 1

*En todos los sistemas bineuronales con sinapsis no inhibitoria, hay órbitas periódicas, y el  $\omega$ -límite de cualquier órbita es periódico.*

### Pruebas:

Usamos la notación de §2.2 y los resultados del lema 2.2.2.

Dado un punto inicial  $p$ , consideremos  $q=(x,0)$  tal que  $p=\psi(q,t_p)$  para  $t_p > 0$ . Estudiaremos la  $g$ -órbita de  $(x,0)_{\text{mod } k}$ .

Si  $\rho(g)$  es irracional, entonces todas las órbitas de  $g$  son densas, debido al teorema de Schwartz, y luego, todas cortan al intervalo abierto  $I$ . Luego, según el lema 2.2.2, todas las  $\psi$ -órbitas pasan por  $(0,0)$ , en algún tiempo positivo. En particular la  $\psi$ -órbita de  $(0,0)$  lo hace, y es, por lo tanto, periódica. Todas las  $\psi$ -órbitas son pues, eventualmente periódicas, y coinciden desde un cierto tiempo positivo en adelante con la órbita de  $(0,0)$ .

Si  $\rho(g)$  es racional, entonces todas las  $g$ -órbitas tienen sus respectivos  $\omega$ -límites en  $g$ -órbitas periódicas. Veamos que lo mismo sucede para las  $\psi$ -órbitas:

Distinguiremos dos casos:

Si los  $g$ -iterados de  $(x,0)_{\text{mod } k}$  no pasan por el intervalo  $I$ , el lema 2.2.2 asegura que la  $\psi$ -órbita está determinada por la  $\phi$ -órbita. Su  $\omega$ -límite es periódico, y no pasa por  $I$ .

Si algún iterado está en  $I$ , entonces el lema 2.2.2 asegura que la  $\psi$ -órbita pasa por  $(0,0)$ . Estudiemos los  $g$ -iterados de  $(0,0)$ . Si ninguno está en  $I$ , entonces  $(0,0)$  está comprendido en el primer caso, y su  $\omega$ -límite es periódico. Si algún iterado de  $(0,0)$  está en  $I$ , entonces la  $\psi$ -órbita de  $(0,0)$  vuelve a  $(0,0)$ , y por lo tanto, es periódica.  $\square$

## 2.4 LA TRANSFORMACION DE REGRESO PARA SISTEMAS INHIBITORIOS

Ahora estudiaremos el caso de sinapsis inhibitoria, es decir  $a$  y  $b$  negativos.

Por hipótesis, el estado del sistema con cualquier condición inicial, alcanza al cuadrante positivo. Luego, no es restrictivo considerar los estados iniciales en:

$$K = \{(0,y) : 1 \geq y \geq 0\} \cup \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$$

El conjunto  $K$  es homeomorfo al intervalo real  $[-1,1]$ , por la transformación  $(0,y) \rightarrow -y$ ;  $(x,0) \rightarrow x$ . Denotaremos  $K$ , tanto para referirse al conjunto previamente definido, como a su imagen homeomorfa (el intervalo  $[-1,1]$ ).



Consideremos la siguiente transformación de regreso:

$h: K \rightarrow K$ , definida por  $h(p) = \lim_{t \rightarrow 1^+} \psi(p, t)$ , para  $p \in K$  y  $t_p$  el primer instante positivo tal que dicho límite está en  $K$ . (Figura 7).

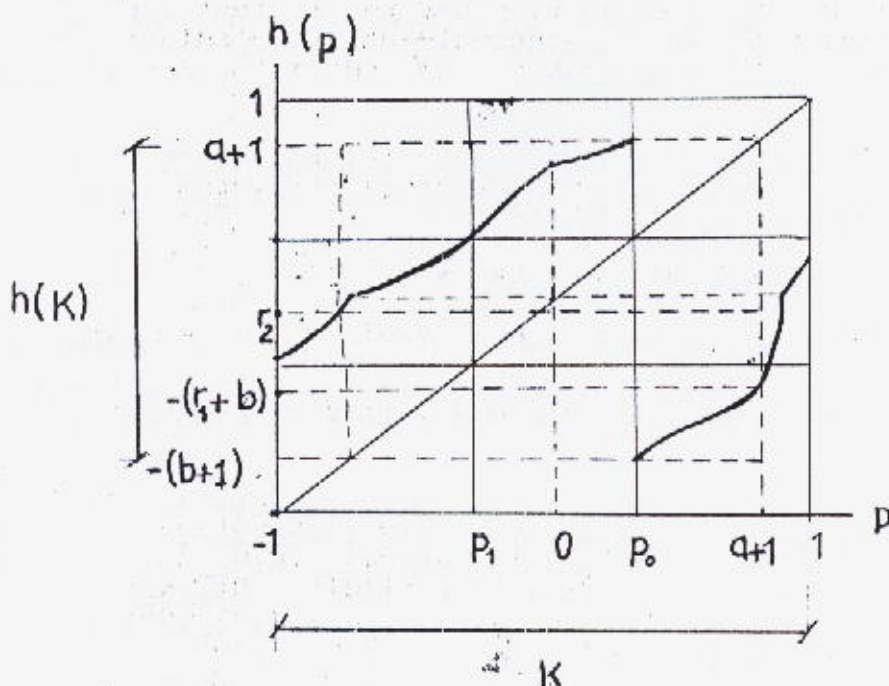


Fig.7

**LEMA 2.4.1**

- i)  $h$  está bien definida, es continua y creciente a trozos, con un solo punto  $p_0$  de discontinuidad.
- ii)  $h$  restringida a su imagen es inyectiva.

**Pruebas:**

El campo vectorial dado  $(u_1, u_2)$  está definido en un rectángulo cerrado, es de clase  $C^2$ , y tiene componentes positivas. Entonces, está acotado por arriba de cero,  $\psi(p, t)$  corta transversalmente a las rectas verticales y horizontales, y el primer punto de corte de  $\psi(p, t)$  con el conjunto  $\{(1, y) : 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, 1) : 0 \leq x \leq 1\}$ , está bien definido y depende continuamente de  $p$ .

Consideremos su composición con la ley de sinapsis  $f$ . Su imagen es:

$$\Gamma = \left\{ (x,0) : a(0) \leq x \leq 1+a(1) \right\} \cup \left\{ (0,y) : b(0) \leq y < 1+b(1) \right\}$$

$f$  tiene un único punto  $(1,1)$  de discontinuidad, y está dada por  $id+a$  e  $id+b$ , ambas continuas y crecientes.

Consideremos ahora el primer punto de corte con  $K$ , tomando como condición inicial un estado en  $\Gamma$ . Existe, debido al lema 2.1.2, y como función de la condición inicial, es continua y creciente. Luego,  $h$  está bien definida, se construye como la composición de funciones continuas y crecientes a trozos, y por lo tanto, también es de ese tipo. Hay un único punto de discontinuidad de  $h$ , porque  $f$  tiene uno solo, y las otras funciones, que se componen con  $f$ , son continuas e inyectivas.

$$\text{Im}(h) = \left\{ p \in K : (0, 1+b(1)) < p \leq (1+a(1), 0) \right\}.$$

Usando la notación del lema 2.1.2:

Si  $(0, 1+b(1)) < p < p' \leq p_0$ , entonces,  $(0, r_2) < h(p) < h(p') \leq (1+a(1), 0)$ .

Si  $p_0 < p < p' \leq (1+a(1), 0)$ , entonces

$$(0, 1+b(1)) < h(p) < h(p') \leq (0, r_1 + b(r_1)).$$

Del lema 2.1.2:  $(0, r_1 + b(r_1)) < (0, r_2)$ .

Luego,  $h$  es inyectiva cuando se restringe a su imagen.  $\square$

La transformación continua a trozos  $h$  es un caso particular de las estudiadas en [4] y [8].

## 2.5 REGULARIZACION DE LOS SISTEMAS INHIBITORIOS

Consideremos la circunferencia  $S^1$ , obtenida al identificar los dos extremos del intervalo  $K$ . Ahora,  $h$  induce una función de  $S^1$  en sí mismo, continua y creciente a trozos, que será también llamada  $h$ .

### LEMA 2.5.1

Existen en la circunferencia  $S^1$  un homeomorfismo  $g$ , que preserva el orden, y una función  $\xi: S^1 \rightarrow S^1$ , continua, sobreyectiva y no decreciente, tales que  $\xi \circ g(p) = h \circ \xi(p)$  para todo  $p \in \xi^{-1}(\text{Im}(h))$ .

**Pruebas:**

Obsérvese que la imagen de  $h$  es un intervalo obtenido de  $K$  al retirar un conjunto  $I$  compuesto por dos pequeños intervalos a la izquierda y derecha de  $K$ :  $\text{Im}(h) = K \setminus I$ .



$h$  restringida a su imagen es inyectiva, debido al lema 2.4.1. Entonces, para cualquier  $p \in K$ , el conjunto  $h^{-1}(p) \cap \text{Im}(h)$  es, o bien vacío, o bien un único punto. Consideremos la semitrayectoria hacia el pasado de cualquier punto  $p \in \text{Im}(h)$ , definida como  $h^{-n}(p) \cap \text{Im}(h)$  para  $n \geq 0$ , obteniendo una sucesión finita o infinita numerable.

La función  $h$  tiene una única discontinuidad  $p_0$ . Si  $p_0 \in \text{Im}(h)$  definimos  $K' = K$ ;  $\xi: K' \rightarrow K$  la identidad, y  $J = \emptyset$ . Si  $p_0 \notin \text{Im}(h)$ , sea  $p_n = h^{-n}(p) \cap \text{Im}(h)$ , para cada  $n \geq 0$ , si no es vacío. Construyamos un intervalo  $K'$ , cortando  $K$  en cada punto  $p_n$  de discontinuidad de  $h$ , e insertando allí, un pequeño intervalo  $J_n$  de longitud  $1/2^n$ . Precisamente:

Sea para  $p \in K$ , el subconjunto de números naturales:

$$N(p) = \left\{ n \geq 0: p_n < p \right\},$$

y considérese el intervalo  $K' = \left[-1, 1 + \sum_{n \in N(p)} 1/2^n\right]$ . Sea  $\xi: K' \rightarrow K$  definida por:

$$\xi(p') = \sup \left\{ p: p + \sum_{n \in N(p)} 1/2^n \leq p' \right\}$$

$N(p)$  y  $\xi$  son no decrecientes. Por construcción  $\xi(p + \sum_{n \in N(p)} 1/2^n) = p$ , y entonces,  $\xi$  es sobreyectiva. Es una transformación no decreciente, y sobreyectiva de un intervalo en otro. Luego, es continua.

Denotaremos con  $\eta: K \rightarrow K'$  a la inversa (discontinua) a la derecha de  $\xi$ , definida por:  $\eta(p) = p + \sum_{n \in N(p)} 1/2^n$ .

Identificando ambos extremos del intervalo  $K$ , y ambos de  $K'$ ,  $\xi$  induce una transformación continua, no decreciente, y sobreyectiva en la circunferencia (que también será llamada  $\xi$ ).

Sea  $J_n = \xi^{-1}(p_n)$ , y  $J = \bigcup_{n \geq 0} J_n$ .

Definamos un homeomorfismo  $g$  en la circunferencia, que preserve el orden, tal que  $g(\eta(p)) = \eta(h(p))$  para todo  $p \in K \setminus \text{Im}(h)$ . En particular  $g(\eta(p_n)) = \eta(p_{n-1})$ , para  $n \geq 1$  y  $g(\eta(p_0)) = \eta(h(p_0))$ . Entonces,  $g$  debe ser definido en  $J$  de modo que  $g(J_n) = J_{n-1}$ , para todo  $n \geq 1$ ; y  $g(J_0) = \xi^{-1}(\bar{1})$ . (Figura 8).

Las funciones  $\xi$  y  $g$  verifican la tesis.  $\square$

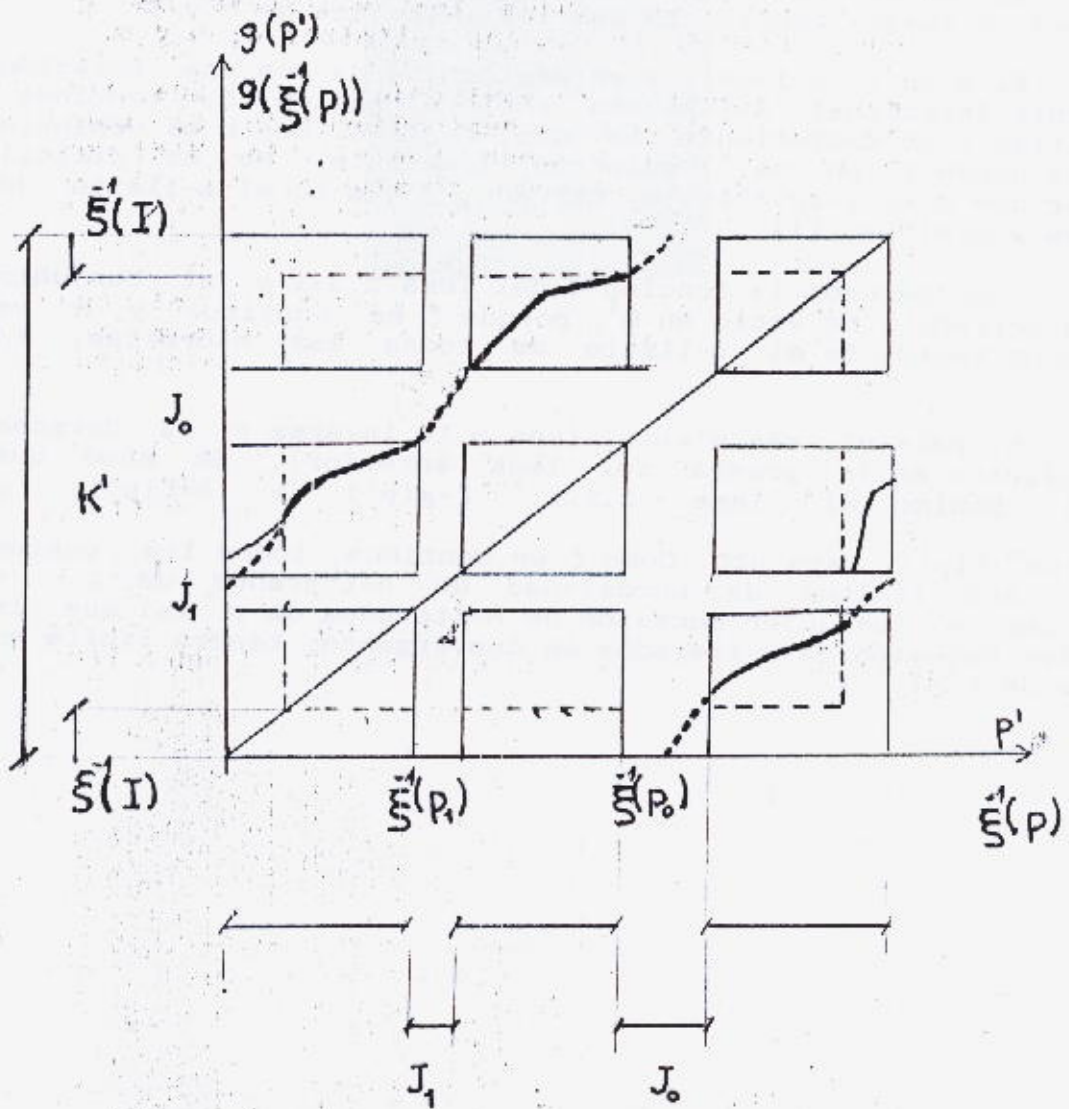


Fig. 8



## TEOREMA 2

Los sistemas con sinapsis inhibitoria tienen uno de los dos siguientes comportamientos:

- a) todos los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas; o
- b) hay un conjunto minimal no trivial que es el  $\omega$ -límite de todas las órbitas.

### Pruebas:

Sea el homeomorfismo  $g$  del lema 2.5.1, y considérese su número de rotación  $\rho$ .

Si  $\rho$  es racional, todos los  $\omega$ -límites de  $g$  son periódicos, y luego, también lo son los  $\omega$ -límites de  $h$  y  $\psi$ .

Si  $\rho$  es irracional,  $g$  es semiconjugada con una rotación  $r$  de ángulo irracional. Existe una semiconjugación  $\zeta$ , continua, sobreyectiva y no decreciente, tal que:  $\zeta \circ g = r \circ \zeta$ . Sea  $M$  el conjunto de puntos donde  $\zeta$  no es localmente constante. No es difícil verificar que  $M$  es  $g$ -invariante, cerrado, y que es el  $\omega$ -límite de todas las  $g$ -órbitas. [1]

Consideremos la función  $\zeta$  del lema 2.5.1 y el conjunto  $\zeta(M)$ . Es cerrado y no vacío en  $S^1$ , porque  $\zeta$  es continua y  $M$  es compacto no vacío. Es el  $\omega$ -límite de todas las  $h$ -órbitas; en efecto:

Si  $p \in \mathbb{M}(h)$ , sea  $p' = \eta(p)$  (con  $\eta$  la inversa a la derecha de  $\zeta$ , definida en la prueba del lema anterior). Se sabe que  $M = \omega_g(p')$ . Debido al lema 2.5.1,  $\zeta \circ g(p') = h \circ \zeta(p')$ , y  $\zeta \circ g^n(p') = h^n \circ \zeta(p')$ , para  $n \geq 0$ . Como  $\zeta$  es continua, todos los puntos de  $\zeta(M)$  son límites de sucesiones de  $h$ -iterados de  $p$ , y reciprocamente, cualquier sucesión de  $h$ -iterados de  $p$ , tal que la respectiva sucesión de  $g$ -iterados es convergente, tendrá límite en un punto de  $\zeta(M)$ .  $\square$

### 3 ESTABILIDAD

En §1.3, se definió el espacio de parámetros  $\mathcal{P}$ . En esta sección, el objetivo es estudiar cómo las propiedades asintóticas de los sistemas bineuronales  $\phi$  en  $\mathcal{P}$ , dependen de los parámetros.

Una propiedad de los sistemas bineuronales se dice *genérica*, si se verifica para una familia abierta y densa de sistemas  $\phi$  en  $\mathcal{P}$ .

#### 3.1 DEPENDENCIA DE LA TRANSFORMACION DE POINCARÉ COMO FUNCIÓN DE LOS PARÁMETROS

Consideraremos sistemas con sinapsis no inhibitoria.

En esta subsección veremos cómo el difeomorfismo  $g \in \text{Diff}^2(S^1)$ , construido en §2.2, depende de los parámetros dados  $\phi = (u_1, u_2, a, b)$ .

No hay, en general, un único difeomorfismo  $g$  para cada sistema  $\phi$  (nótese que el campo vectorial  $\chi$ , construido en §2.2, puede modificarse en un abierto).

Denotaremos  $\text{Diff}^2(S^1)$  al espacio topológico de todos los difeomorfismos  $g$  de clase  $C^2$  en  $S^1$ , con la topología inducida por la norma  $\| \cdot \|_2$ , definida como el supremo de  $|g(x)|, |g'(x)|, |g''(x)|$ , para  $x \in S^1$ .

##### LEMA 3.1.1

Fijado  $k > 1$ , y dado un sistema  $\phi = (u_1, u_2, a, b) \in \mathcal{P}$ , con sinapsis no inhibitoria, tal que  $-a(0) < k-1$ , la construcción de §2.2 da un único intervalo  $I_\phi$ , y únicos valores de  $g_\phi(x)$ ,  $g'_\phi(x)$ ,  $g''_\phi(x)$ , para cada  $x \in I_\phi \cup g_\phi^{-1}(I_\phi)$ .

Los puntos de  $\partial(I_\phi \cup g_\phi^{-1}(I_\phi))$ , dependen continuamente de  $\phi$ ; y  $g_\phi(x)$ ,  $g'_\phi(x)$ ,  $g''_\phi(x)$ , para cada  $x \in I_\phi \cup g_\phi^{-1}(I_\phi)$ , dependen continuamente de  $(\phi, x) \in \mathcal{P} \times S^1$ .

##### Pruebas

Por definición, el intervalo  $I_\phi$  es:

$$I_\phi = \begin{cases} (x, 0)_{\text{mod } k} : 1 + a(1) < x < k + a(0) \end{cases} & \text{si } a < 0; \\ I_\phi = \begin{cases} (x, 0)_{\text{mod } k} : 1 < x < k + a(0) \end{cases} & \text{si } a > 0; \end{cases}$$

y entonces, los extremos de  $I_\phi$  dependen continuamente de  $a$ ; luego, de  $\phi \in \mathcal{P}$ .

$I_\phi \cup g_\phi^{-1}(I_\phi)$  es un abierto de  $S^1$ , es decir, no contiene a su borde, formado por los extremos del intervalo  $I_\phi$ , y por los



estremos del intervalo  $\sigma_0^{-1}(I_0)$  que no están en  $I$ . Para probar que ellos dependen continuamente de  $\sigma$ , es suficiente probar que  $\sigma_0^{-1}(x)$  depende continuamente de  $(x, \sigma)$ , cuando  $x \in I_0 \cup \sigma_0^{-1}(I_0)$ . Demostraremos la última parte de la tesis, y los mismos argumentos, con  $\sigma_0^{-1}$  en lugar de  $\sigma_0$ , serán entonces aplicables.

Sea  $\phi(p, t)$  el flujo tangente al campo vectorial  $\chi$ , definido en § 2.2. Por construcción,  $\forall p \in \mathbb{R}^2$  existen primeros instantes  $t_1 > 0$  y  $t_2 < 0$ , tales que  $\sigma(p) = \phi(p, t_1(p)) \in S^1$ , y  $\sigma^{-1}(p) = \phi(p, t_2(p)) \in S^1$ .

Si  $x \in S^1$ , y  $x \in I_0 \cup \sigma_0^{-1}(I_0)$ , entonces  $\{\phi(p, t) : 0 \leq t \leq t_1(p)\}$  no corta a  $I_0$ , y  $\sigma_0$  se obtiene con el siguiente procedimiento:

Sea  $p_1$  el primer punto de intersección de  $\phi(x, 0, t) = \psi(x, 0, t)$  con el conjunto  $\Gamma = \{(x, y) : x=1 \text{ ó } y=1\}$ .

Si  $p_1 = (x_1, 1)$ , entonces  $\sigma(x) = x_1 + \alpha(x_1)$ .

Si  $p_1 = (1, y_1)$ , entonces sea  $p_2$  el primer punto de intersección de  $\psi(0, y_1 + b(y_1), t)$ , con el conjunto  $\Gamma$ . Ahora, aplicamos los mismos argumentos a  $p_2$ , en lugar de  $p_1$ , de acuerdo a si  $p_2 = (x_1, 1)$  o si  $p_2 = (1, y_2)$ . Repitiendo esa construcción, se tiene una cantidad finita y ordenada de puntos  $p_1, p_2, \dots, p_{m+1}$  en  $\Gamma$ , tales que  $p_i = (1, y_i)$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $\psi(0, y_i + b(y_i), t)$  corta  $\Gamma$  en  $p_{i+1}$ , y  $p_{m+1} = (x_1, 1)$ . Finalmente:  $\sigma(x) = x_1 + \alpha(x_1)$ . (figura 9).

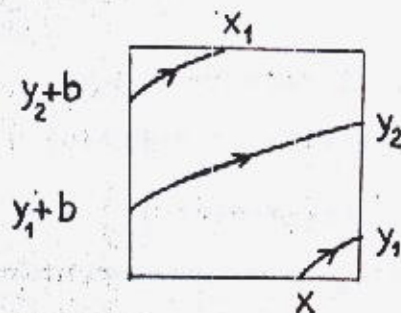


Fig.9

Los arcos sucesivos de la órbita  $ow$ , son tangentes, por definición, al campo vectorial dado  $(u_1, u_2)$ , que tiene componentes positivas. Luego, son transversales a las rectas verticales y horizontales. La solución de la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}(x(t), y(t)) = (u_1(x(t)), u_2(y(t))),$$

depende continuamente del segundo miembro, y de la condición inicial, y también lo hacen sus dos primeras derivadas respecto de  $x$ , cuando el segundo miembro es de clase  $C^2$  [3]. Entonces, también lo hacen los sucesivos puntos  $p_i$ , de intersección de la solución con el conjunto  $\Gamma$ .

□

### PROPOSICION 3.1.2

Consideremos un sistema  $\phi$  en  $\mathcal{Y}$ , con sinapsis no inhibitoria.

Supongamos que para cierto  $\phi_0 \in \mathcal{Y}$  se construye  $g_0 \in \text{Diff}^2(S^1)$  como en §2.2. Entonces:

Dado cualquier entorno  $\mathcal{N}$  de  $g_0$  existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $\phi_0$ , tal que, para cualquier  $\phi \in \mathcal{U}$  puede construirse una  $g \in \mathcal{N}$ .

Recíprocamente, dado  $\mathcal{U}$  entorno de  $\phi_0$ , existe  $\mathcal{N}$  entorno de  $g_0$ , tal que toda  $g \in \mathcal{N}$  puede construirse para alguna  $\phi \in \mathcal{U}$ .

Pruebas:

Dado el entorno  $\mathcal{N}$  de  $g_0 \in \text{Diff}^2(S^1)$ , sea  $\epsilon$  tal que  $\|g - g_0\| < 3\epsilon \Rightarrow g \in \mathcal{N}$ . Sea  $\delta$  tal que  $|\sigma_0(x) - \sigma_0(y)| < \epsilon$  si  $|x - y| < \delta$ . Denotaremos  $J_\phi = I_\phi \cup \sigma_\phi^{-1}(I_\phi)$ , y  $J_0 = J_{\phi_0}$ .

Por el lema 2.1.1, existe un entorno  $\mathcal{U}$  de  $\phi_0$  tal que, para todo  $\phi \in \mathcal{U}$ , cada punto de  $\partial J_\phi$  está a distancia menor que  $\delta$  del correspondiente punto de  $\partial J_0$ ; y los valores de  $\sigma_\phi(x)$ ,  $\sigma'_\phi(x)$ ,  $\sigma''_\phi(x)$ , difieren menos que  $\epsilon$  de aquellos de  $\sigma_0$ , para todo  $x$  en el compacto  $S^1 \setminus J_\phi$ .

Para  $x \in J_\phi$ , los valores de  $\sigma_\phi(x)$  pueden modificarse, para obtener otro difeomorfismo aplicable al mismo sistema  $\phi$ . Es suficiente demostrar que, si  $\phi \in \mathcal{U}$ , entonces puede elegirse  $g \in \text{Diff}^2(S^1)$  tal que:

$$g|_{S^1 \setminus J_\phi} = \sigma_\phi|_{S^1 \setminus J_\phi} \quad ; \quad \|g - g_0\|_2 < 3\epsilon.$$

En efecto, sea  $x \in S^1$ , y denotemos  $\bar{x}$  al punto de  $\partial J_0$  más cercano a  $x$ .



Definamos:  $\sigma(x) = \sigma_0(x)$ , para todo  $x \in J_0 \cup J_0'$ , y

$$\sigma(x) = \lambda(x)\sigma_0(x) + (1-\lambda(x))\sigma_0(\bar{x}), \quad \text{para todo } x \in J_0 \cup J_0',$$

donde  $\lambda: x \in J_0 \cup J_0' \rightarrow [0,1]$  es una función auxiliar, de clase  $C^\infty$ , que verifica:

$$\lambda(x) = 0, \text{ si } d(x, \bar{x}) \geq \delta, \text{ o si } |\sigma_0(x) - \sigma_0(\bar{x})| \geq 2\epsilon;$$

$$\lambda(x) = 1, \text{ en un entorno de } \partial(J_0 \cup J_0').$$

Tenemos:

$$|\sigma(x) - \sigma_0(x)| = \lambda(x) |\sigma_0(x) - \sigma_0(x)| = 0, \quad \text{si } \lambda(x) = 0;$$

y si  $\lambda(x) \neq 0$ , entonces:

$$|\sigma(x) - \sigma_0(x)| \leq |\sigma_0(x) - \sigma_0(\bar{x})| + |\sigma_0(\bar{x}) - \sigma_0(x)| < 3\epsilon$$

Similarmente, las primeras dos derivadas de  $\sigma - \sigma_0$  son, en norma, menores que  $3\epsilon$ .

Para probar el recíproco:

Dado  $\mathcal{U}$ , entorno de  $\phi_0 = (u_1, u_2, a_0, b_0)$  en  $\mathcal{Y}$ , tomemos  $\epsilon$  tal que, todos los sistemas  $\phi$  de la forma  $\phi = (u_1, u_2, a, b_0)$  con  $\|a - a_0\|_2 < \epsilon$ , están en  $\mathcal{U}$ . Sea  $\sigma_0$  un difeomorfismo construido para el sistema  $\phi_0$ , y sea  $\mathcal{N}$  el entorno de  $\sigma_0$  definido por:

$$\mathcal{N} = \left\{ \sigma \in \text{Diff}^2(S^1) : \|(\sigma - \sigma_0) \circ (\sigma_0^{-1} \circ (id + a_0))\|_2 < \epsilon \right\}.$$

Dado  $\sigma$  en  $\mathcal{N}$ , tomemos el sistema  $\phi = (u_1, u_2, a, b_0)$ , definiendo  $a = a_0 + (\sigma - \sigma_0) \circ (\sigma_0^{-1} \circ (id + a_0))$ . Entonces  $\phi \in \mathcal{U}$ , y es suficiente probar que  $\sigma_0(x) = \sigma(x)$ , para todo  $x \in J_0$ .

Tenemos que:  $\sigma_0(x) = x_1 + a_0(x_1)$ , para  $x \in J_0$ , usando la construcción descrita en la prueba del lema 3.1.1 (fig.9). Nótese que la función  $a_0$  no se considera para construir el punto  $x_1$ ; luego, la misma construcción es válida para el sistema  $\phi$ , en lugar de  $\phi_0$ . Entonces, si  $x \in J_0$ :

$$\sigma_0(x) = x_1 + a(x_1) = x_1 + a_0(x_1) + (\sigma - \sigma_0) \circ (\sigma_0^{-1} \circ (id + a_0))(x_1) = \sigma_0(x) + (\sigma - \sigma_0)(x).$$

$$\text{Luego: } \sigma_0(x) = \sigma(x), \quad \forall x \in J_0.$$

□

### 3.2 SISTEMAS BINEURONALES DE TIPO MORSE-SMALE

Sea  $g$  un difeomorfismo en el círculo  $S^1$ . Un punto periódico  $p$ , de período  $n$ , es *hiperbólico* si la derivada de  $g^n$  en  $p$  no es 1. Es un *atractor* si la derivada es menor que 1, y es un *repulsor* si es mayor que 1. Un difeomorfismo en el círculo es de tipo *Morse-Smale* si tiene puntos periódicos, y todos ellos son hiperbólicos.

No es difícil demostrar que, si  $g$  es de Morse-Smale, entonces tiene un número par de puntos periódicos, la mitad de ellos repulsores, y la otra mitad atractores [1].

Es sabido que, en el espacio topológico  $\text{Diff}^r(S^1)$ , para  $r \geq 1$ , la familia de los difeomorfismos tipo Morse-Smale es *abierta y densa*, y que los puntos periódicos de los difeomorfismos de Morse-Smale son *persistentes* ([2]).

De estas afirmaciones y de los lemas anteriores se obtiene:

#### LEMMA 3.2.1

*Si un sistema bineuronal con sinapsis no inhibitoria admite una transformación de Poincaré  $g$ , construida como en §2.2, de tipo Morse-Smale, tal que los puntos de  $\partial I$  son no periódicos, entonces:*

*tiene solo un número finito de órbitas periódicas, que son el  $\omega$ -límite de todas las otras, y que son persistentes. Luego, hay un número finito de ciclos límites.*

#### Pruebas:

Cada  $\omega$ -límite es una órbita periódica (teorema 1). Como ya se vio en la prueba del teorema 1, o bien está determinada por una  $g$ -órbita que no corta al intervalo  $I$ , o bien es la órbita periódica de  $(0,0)$ . Como  $g$  es Morse-Smale, las órbitas periódicas del primer tipo son una cantidad finita. Y la del segundo tipo es a lo sumo una sola.

Para probar que son persistentes, nótese que las del primer tipo (las que no cortan  $I$ ), son persistentes bajo pequeñas perturbaciones de  $g$ , porque  $g$  es de Morse-Smale. Usando la proposición 3.1.2, son persistentes bajo pequeños cambios de los parámetros del sistema.

Ahora, demostremos que el segundo tipo de órbita periódica (la órbita de  $(0,0)$ ) es persistente. Existe un número positivo  $N$  tal que  $g^N(0,0) \in I$ . Eso es:  $(0,0) \in g^{-N}(I)$ . Como el intervalo  $g^{-N}(I)$ , para  $N$  fijo, depende continuamente del difeomorfismo  $g$ , todos los difeomorfismos cercanos a  $g$  verifican la misma relación. Además, dado  $\epsilon > 0$ , los difeomorfismos cercanos a  $g$  tienen los primeros  $N$  iterados de  $(0,0)$  a distancia menor que  $\epsilon$  que los de  $g$ . Por la proposición 3.1.2, la órbita periódica de  $(0,0)$  es persistente.



Queda por probar que alguna de las órbitas periódicas son ciclos límites. Si la órbita de (0,0) es periódica, entonces es el  $\omega$ -límite de todos los puntos del abierto  $\bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(I)$ . Entonces es un ciclo límite. Y si la órbita de (0,0) es no periódica, hay un atractor de  $g$  que no corta a  $I$ . El es el  $\omega$ -límite de las órbitas cercanas, es decir, es un ciclo límite. □

**TEOREMA 3**

*Genéricamente, los sistemas bineuronales con sinapsis no inhibitoria tienen un número finito de ciclos límites persistentes.*

**Proof:**

Considérense los sistemas en las hipótesis del lema anterior. Ellos tienen la propiedad enunciada.

Los difeomorfismos de Morse-Smale constituyen un abierto y denso en  $\text{Diff}(S^1)$ . La hipótesis de que los puntos de  $\partial I$  no sean periódicos bajo  $g$ , es también una condición abierta y densa en  $\text{Diff}(S^1)$ . Debido a la proposición 3.1.2, la familia considerada es abierta y densa en el espacio de los sistemas bineuronales con sinapsis no inhibitoria. □

**3.3 SISTEMAS CON UN UNICO CICLO LIMITE**

**TEOREMA 4**

*Existe una familia abierta de sistemas, para los cuales la órbita por (0,0) es periódica y es el único  $\omega$ -límite, y entonces, el único ciclo límite.*

*Los sistemas con sinapsis excitatoria (y los parámetros  $a$  y  $b$  cercanos a cero en la topología  $C^1$ ) tienen un único ciclo límite, que es la órbita periódica de (0,0).*

**Pruebas:**

Considérese el difeomorfismo  $g$  y el intervalo abierto  $I \subset S^1$ , como en §2.2. Tomemos la familia de sistemas tales que todas sus  $g$ -órbitas intersecan  $I$ :

$$S^1 = \bigcup_{n \geq 0} g^{-n}(I)$$

Siendo  $S^1$  compacto, existe algún  $N > 0$ , tal que  $S^1 = \bigcup_{n=0}^N g^{-n}(I)$ . Fijado  $N$ , la propiedad  $S^1 = \bigcup_{n=0}^N g^{-n}(I)$  es también

verificada por los difeomorfismos cercanos a  $g$ . Ahora, la proposición 3.1.2, da un entorno  $\mathcal{U}$  del sistema  $oe\mathcal{P}$ , tal que, todo otro sistema de  $\mathcal{U}$  tiene todas sus órbitas pasando por (0,0) en un tiempo positivo. Esto completa la primera parte del teorema.

Para probar la segunda afirmación, basta demostrar que los puntos periódicos en  $x \in S^1$ , tales que su  $g$ -órbita no corta a  $I$  son repulsores, es decir: si  $g^N(x) = x$ , entonces la derivada  $(g^N)'(x) > 1$ .

En efecto, como  $x \notin I \cup g^{-1}(I)$ , entonces  $g(x) = x_1 + a(x_1)$ , donde  $x_1$  se construye a partir de  $x$ , con el procedimiento detallado en la prueba del lema 3.1.1, obteniendo una cantidad finita de puntos:

$$P_1 = (1, y_1), \dots, P_m = (1, y_m), P_{m+1} = (x_1, 1), \quad (m \geq 0) \text{ (figura 9)}.$$

Calculemos  $(g)'(x)$ . Como el flujo  $\psi$  es tangente al campo vectorial dado  $(u_1, u_2)$  en el rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ , tendremos, para  $m=0$ :

$$\int_x^{x_1(x)} \frac{dx}{u_1(x)} = \int_0^1 \frac{dy}{u_2(y)} = t_0, \text{ y entonces: } dx_1/dx = u_1(x_1)/u_1(x)$$

$$g'(x) = x_1'(x) (1 + a'(x_1)) = (1 + a'(x_1)) \cdot \frac{u_1(g(x) - a(x_1))}{u_1(x)}$$

Y, cuando  $m \geq 1$ :

$$\int_x^{y_1(x)} \frac{dx}{u_1(x)} = \int_0^{y_1(x)} \frac{dy}{u_2(y)} = t_0; \quad \int_0^1 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{y_1+b(y_1)}^{y_2(x)} \frac{dy}{u_2(y)} = t_1;$$

$$\int_0^{x_1(x)} \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{y_m+b(y_m)}^1 \frac{dy}{u_2(y)} = t_m$$

Tomando derivadas:

$$g'(x) = x_1'(x) \cdot (1 + a'(x_1)) =$$

$$(1 + a'(x_1)) \cdot \frac{u_1(g(x) - a(x_1))}{u_1(x)} \cdot \prod_{i=1}^m \frac{u_2(y_i) (1 + b'(y_i))}{u_2(y_i + b(y_i))}$$



Por la regla de la cadena:

$$(\sigma^N)'(x) = \sigma'(x) \cdot \sigma'(\sigma(x)) \cdots \sigma'(\sigma^{N-1}(x)) = \prod_{j=0}^{N-1} \sigma'(\sigma^j(x)) =$$

$$\prod_{j=0}^{N-1} \left[ \frac{u_1(\sigma^j(x) - \alpha(x_j)) \cdot [1 + \alpha'(x_j)]}{u_1(\sigma^j(x))} \cdot \frac{u_2(y_{1j}) [1 + b'(y_{1j})]}{u_2(y_{1j} + b(y_{1j}))} \right]$$

donde  $x_j = x_1(\sigma^{j-1}(x))$ ,  $y_{1j} = y_1(\sigma^j(x))$ .

Siendo  $u_1$  y  $u_2$  estrictamente creciente, y  $\alpha$  y  $b$  ambas positivas y con sus derivadas cercanas a cero, sigue que  $(\sigma^N)'(x) > 1$ , o sea,  $x$  es un repulsor. □

**Nota:**

El mismo argumento muestra que las órbitas periódicas en sistemas inhibitorios, que no pasan por  $(0,0)$ , son atractores.

## 4 DINAMICA SIMBOLICA

### 4.1 DEFINICIONES

En esta sección estudiaremos la dinámica simbólica [7], definida en el sistema bineuronal por las sucesiones de descargas de las neuronas.

La descarga de una neurona se produce cuando su variable de estado alcanza el umbral superior (normalizado en 1).

Sea  $\theta(p)$  la sucesión de descargas de las neuronas, donde  $p$  es el estado inicial del sistema bineuronal. Precisamente  $\theta(p)$  es una sucesión de símbolos A y B, definidos como sigue:

$\theta(p) = \{a_i\}_{i \geq 1}$ , con  $a_i = A$  (resp.  $a_i = B$ ), si la  $i$ -ésima descarga se produce en la neurona A (resp. B). Esta definición es aplicable una vez que se asume el orden cronológico de descargas, y las siguientes convenciones se adoptan para ordenar las descargas simultáneas:

Consideremos primero la neurona X, y luego la Y, si la descarga de X ha causado, debido a la ley de sinapsis, la descarga inmediata de X.

Consideraremos primero la neurona A, y luego B, si ambas alcanzaron simultáneamente el nivel de umbral superior.

Para estudiar el comportamiento asintótico de las sucesiones de descargas, no es restrictivo tomar  $p = (x, 0)$ , con  $\min(0, \alpha(0)) \leq x \leq 1$ .

De ahora en adelante, asumiremos el caso de sinapsis no inhibitoria, y consideraremos el procedimiento de regularización definido en §2.2. Por construcción, si  $x \notin \sigma^{-1}(I)$ , entonces  $\sigma(x)$  da el estado de A después de la primera descarga de B, para un sistema con la condición inicial  $(x, 0)$ .

Sea  $m(x)$  el número de descargas de A, antes de la primera descarga de B, con estado inicial  $(x, 0)$ .

Tomemos  $\Sigma = \text{Im } \theta$ , el conjunto de sucesiones binarias  $\theta(x, 0)$ , obtenidas para los estados iniciales  $(x, 0)$ , con  $0 \leq x \leq 1$ .

Definamos en  $\Sigma$ , la transformación *shift a la izquierda*:  $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$  dada por  $\sigma(\{a_i\}) = \{b_i\}$ , con  $b_i = a_{i+1}$ , para todo  $i \geq 1$ .

Sigue, de las definiciones anteriores, que:

$$\sigma^{m(x)+1}(\theta(x, 0)) = \theta(\sigma(x), 0) \quad \text{si } x \notin \text{IU}\sigma^{-1}(I).$$

Sean  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  las componentes conexas de  $S^1 \setminus \text{IU}\sigma^{-1}(I)$ . Son arcos disjuntos cerrados en  $S^1$ , tales que:

$$I \subset \mathcal{A}_1 \subset \sigma^{-1}(I) \subset \mathcal{A}_2 \subset I$$

Notas: Si  $\sigma^{-1}(I) \cap I \neq \emptyset$ , entonces  $\mathcal{A}_1$  ó  $\mathcal{A}_2$  es vacío.



La notación  $a \prec b \prec a$  en  $S^1$ , significa que  $b \prec c$  en el intervalo  $S^1 \setminus a$  (con el orden inducido en ese intervalo por la orientación dada en  $S^1$ ).

#### LEMA 4.1.1

Si la sinapsis es no inhibitoria, entonces:

- i)  $m(x)$  toma valores  $m_i$  constantes en cada arco no vacío  $\mathcal{A}_i$ .  
 ii) Si  $g^n(x) \in I$  para  $n=0, 1, \dots, N$ , entonces la sucesión  $\theta(x,0) = \{a_i\}$  es:

$$a_i = B \text{ para } i = \sum_{j=0}^n (m(g^j(x)) + 1), \text{ con } n = 0, 1, \dots, N$$

$$a_i = A \text{ para los otros valores de } i \text{ que verifican } 1 \leq i \leq m(g^N(x)) + N.$$

Observación:

Sigue que, si  $g^n(x) \in I$  para todo  $n \geq 0$ , entonces para construir la sucesión  $\theta(x,0)$ , solo se necesita saber cuál arco,  $\mathcal{A}_1$  ó  $\mathcal{A}_2$ , contiene  $g^j(x)$  para cada  $j \geq 0$ .

Pruebas:

La segunda parte sigue de las anteriores definiciones.

Demostremos la primera parte:

Como en la prueba del lema 3.1.1, para  $x \in I \cup g^{-1}(I)$ , existen puntos  $p_1, \dots, p_m, p_{m+1}$  en la  $\psi$  órbita de  $(x,0)$ , que dependen continuamente de  $x$ , con  $p_i = (1, y_i)$  para  $1 \leq i \leq m$  (si  $m \geq 1$ ), y  $p_{m+1} = (x_1, 1)$ . Entonces  $m(x)$  es localmente constante si  $x_1(x) \neq 1$ , o sea, si  $g(x) \neq 1 + \alpha(1)$ . De la definición del intervalo  $I$ , en §2.2, y de las convenciones adoptadas para definir  $m(x)$ , sigue que  $m(x)$  es localmente constante si  $x \in I \cup g^{-1}(I)$ . Luego, es constante en las componentes conexas  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ .

□

## 4.2 CODIGOS PERIODICOS

Diremos que  $\theta(x,0)$  es una sucesión periódica de periodo  $N$ , si existe  $N$ , mínimo entero positivo tal que  $\sigma^N(\theta(x,0)) = \theta(x,0)$ . En ese caso, llamamos código periódico de  $\theta(x,0)$ , al conjunto de todas las  $N$ -uplas formadas con  $N$  términos consecutivos de  $\theta(x,0)$ .

La sucesión  $\theta(x,0)$  es eventualmente periódica si  $\sigma^M(\theta(x,0))$  es periódica, para algún  $M \geq 0$ . En ese caso, llamamos código periódico de  $\theta(x,0)$ , al código periódico de  $\sigma^M(\theta(x,0))$ .

**LEMA 4.2.1**

Si la sinapsis es no inhibitoria:

Sea el conjunto  $Q = \{x \in S^1 : g^n(x) \in I \text{ para todo } n \geq 0\}$ , y supongamos que es no vacio:

(i) Si  $x \in Q$  es periódico según  $g$ , entonces  $\theta(x, 0)$  es una sucesión periódica; y su código periódico es independiente de  $x$ .

(ii) Si  $x \in Q$ , entonces  $\theta(x, 0)$  es eventualmente periódica, y existe un código periódico común para todo  $x$  en  $Q$ .

**Pruebas:**

(i) Sea  $x \in Q$  periódico según  $g$ . El lema 4.1.1 asegura que  $\theta(x, 0)$  es periódico y su código periódico está determinado por la sucesión de arcos,  $\mathcal{A}_1$  ó  $\mathcal{A}_2$ , que contiene a cada  $g^j(x)$ .

Sean  $x$  y  $x'$  dos puntos  $g$ -periódicos en  $Q$ . Así, el número de rotación de  $g$  es racional, y ambos,  $x$  y  $x'$  tienen el mismo período  $N$ :  $g^N(x) = x$  y  $g^N(x') = x'$ .

Definamos  $x_j = g^{jL}(x) \in \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , para  $j=0, 1, \dots, N-1$ ; donde  $L \geq 0$  es un entero tal que

$$g^{-1}(I) \subset x_0 = g^L(x) \subset x_j \subset g^{-1}(I) \text{ para } j=1, \dots, N-1. \quad (1)$$

(Para construir tal  $L$ , considérense los puntos  $x, g(x), \dots, g^{N-1}(x)$  en el intervalo  $S^1 \setminus g^{-1}(I)$ , ordenándolos de acuerdo a la orientación positiva en dicho intervalo de  $S^1$ . El primero será elegido como  $g^L(x)$ ).

Afirmamos que  $x_0 \in \mathcal{A}_2$  y  $x_1 \in \mathcal{A}_1$ . En efecto, como  $g$  preserva la orientación:  $I \subset x_1 \subset x_{j+1} \subset I$  para  $j=1, \dots, N-1$ . En particular:

$$I \subset x_1 \subset x_0 \subset I \quad (2)$$

Por construcción:  $g^{-1}(I) \subset \mathcal{A}_2 \subset I \subset \mathcal{A}_1 \subset g^{-1}(I)$ . Si  $x_0$  estuviera en  $\mathcal{A}_1$ , entonces, por (1):  $I \subset x_0 \subset x_1 \subset g^{-1}(I) \subset I$ , contradiciendo (2). Análogamente, si  $x_1$  estuviera en  $\mathcal{A}_2$ , por (2):  $g^{-1}(I) \subset x_1 \subset x_0 \subset I \subset g^{-1}(I)$ , contradiciendo (1).

Repetiendo la misma construcción para  $x'$ , se obtiene  $x'_j = g^j(x'_0)$ , con  $g^{-1}(I) \subset x'_0 \subset x'_j \subset g^{-1}(I)$  para  $j=1, \dots, N-1$ , y entonces:  $I \subset x'_1 \subset x'_{j+1} \subset I$ .

Supongamos, para fijar ideas que  $x_0 \in \mathcal{A}_2$ .

Si hay dos órbitas periódicas  $\{x_j\}$  y  $\{x'_j\}$  de un homeomorfismo en la circunferencia, los puntos de  $\{x_j\}$  están intercalados entre los de  $\{x'_j\}$  (figura 10). Entonces, concluimos



que el arco  $(x_0, x'_0)$  no contiene otros puntos  $x_i$ , ni  $x'_i$ . Luego, la misma propiedad es válida para el arco  $\sigma^i(x_0, x'_0) = (x_i, x'_i)$ .

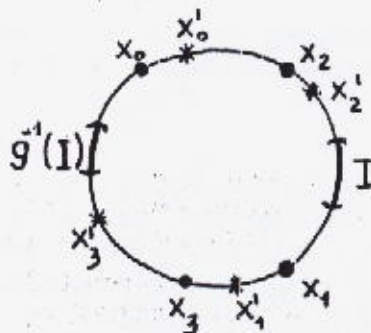


Fig. 10

Como  $\sigma^{-1}(I) \subset x_0 \subset x'_0 \subset x_1 \subset \sigma^{-1}(I)$  para  $i=1, \dots, N-1$ ; y  $x'_i$  no está entre  $\sigma^{-1}(I)$  y  $x'_0$ , entonces:

$$\sigma^{-1}(I) \subset x_0 \subset x'_0 \subset x_i \subset x'_i \subset \sigma^{-1}(I) \text{ para } i=1, \dots, N-1.$$

De aquí:  $x_i \in \mathcal{A}_2$  si  $x'_i \in \mathcal{A}_2$ . Para completar la prueba de i), basta demostrar que  $x'_i \in \mathcal{A}_2$  si  $x_i \in \mathcal{A}_2$ . En efecto, si  $x_i$  estuviera en  $\mathcal{A}_2$  y  $x'_i$  en  $\mathcal{A}_1$ , entonces  $\sigma^{-1}(I) \subset x_i \subset I \subset x'_i \subset \sigma^{-1}(I)$ . Como ningún otro  $x'_j$  está entre  $x_i$  y  $x'_i$ , ninguno está entre  $I$  y  $x'_i$ , ni entre  $\sigma^{-1}(I)$  y  $x'_{i-1}$ . Por construcción, esta última afirmación significa que  $x'_0 = x'_{i-1}$ . Entonces,  $i=1$  y  $x_1 = x_i$ , con  $x_i \in \mathcal{A}_2$ , contradiciendo que  $x_1 \in \mathcal{A}_1$ .

Resta demostrar ii). Como  $Q \neq \emptyset$ , hay  $\sigma$ -órbitas que no cortan a  $I$ , y entonces, no son densas. Luego, por el teorema de Schwartz, el número de rotación del difeomorfismo  $\sigma$  (de clase  $C^2$ ), es racional, y todos los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas. Sea  $x$  en  $Q$ , y sea  $x'$  un punto periódico en  $S^1$  tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(\sigma^n(x), \sigma^n(x')) = 0 \quad (*)$$

(donde la distancia se toma sobre la circunferencia  $S^1$ ). Afirmamos que  $x' \in Q$ . En efecto, si por absurdo fuera  $\sigma^j(x') \in I$  para algún  $j$ , como  $x'$  es periódico, tendríamos que  $\sigma^{j+Nn}(x') \in I$  para todo  $n$ , y por (\*), algún iterado de  $x$  está en el intervalo abierto  $I$ , contradiciendo la hipótesis  $x \in Q$ .

Así,  $\sigma^n(x)$  y  $\sigma^n(x')$  están en  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ , y, por (\*), están en el mismo arco,  $\sigma_1$  ó  $\sigma_2$ , para cada  $n$ , suficientemente grande. Eligiendo un múltiplo  $N$  del periodo de  $x'$ :  $\theta(\sigma^N x, 0) = \theta(x', 0)$ . Como antes se dijo:  $\theta(\sigma^N x, 0) = \sigma^M(\theta(x, 0))$ , para algún  $M > 0$ . Luego,  $\theta(x, 0)$  es eventualmente periódica. Su código periódico es aquel de  $\theta(x', 0)$ , que, como ya se mostró, es independiente de  $x'$ .  $\square$

Estudiaremos ahora la sucesión de descargas  $\theta(x, 0)$  para  $x$  que no está en  $Q$ .

#### LEMA 4.2.2

*Si la sinapsis es no inhibitoria:*

- i)  $\theta(0, 0)$  es siempre eventualmente periódica
- ii) Si  $x \notin Q$ , entonces  $\theta(x, 0)$  es eventualmente periódica y tiene el mismo código periódico que  $(0, 0)$ .

**Pruebas:**

Si  $0 \in Q$ , entonces i) sigue del lema 4.2.1.

Si  $0 \notin Q$ , entonces  $\sigma^N(0) \in I$ , para algún  $N > 0$ . O sea, el estado del sistema vuelve a  $(0, 0)$ , y entonces, la sucesión  $\theta(0, 0)$  es periódica.

Para probar ii) tomemos  $x \notin Q$ ; entonces  $\sigma^N(x) \in I$  para algún  $N > 0$ , y el sistema pasa por el estado  $(0, 0)$ . Esto da:  $\sigma^M(\theta(x, 0)) = \theta(0, 0)$  para algún  $M \geq 0$ , y de allí, resulta la afirmación i).  $\square$

#### TEOREMA 5

*Si la sinapsis es no inhibitoria, entonces todas las sucesiones de descargas son eventualmente periódicas, y hay, a lo sumo dos códigos periódicos.*

**Pruebas:**

Sigue de los lemas 4.2.1 y 4.2.2.  $\square$

#### 4.3 EJEMPLOS Y OBSERVACIONES

Aunque en algunos casos los códigos periódicos pueden coincidir, se encuentran ejemplos que exhiben dos códigos periódicos (ejemplo 4.3.4).



**Observación 4.3.1:**

Si todas las  $g$ -órbitas cortan a  $I$ , entonces hay un código periódico común, para todos los estados iniciales, definido por el código de la órbita (periódica) de  $(0,0)$ . (Véase el lema 4.2.2).

**Observación 4.3.2:**

Si la  $g$ -órbita de  $0$  no corta a  $I$ , entonces hay un código periódico común, para todos los estados iniciales, definido por el  $\omega$ -límite de  $(0,0)$ . (Véase el lema 4.2.1, y la prueba del lema 4.2.2, e el caso  $0 \in Q$ ).

Aún cuando las condiciones anteriores no se cumplan, puede presentarse un único código periódico para todos los estados iniciales, como se manifiesta en el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 4.3.3:**

Sean  $u_1(x) = 15 - 3x$ ;  $u_2(y) = 12 - 3y$ ;  $a(x) = -10/1043$ ;  $b(y) = 9/40$ .

Si el estado inicial es  $(105/149, 0)$  la  $\psi$ -órbita es periódica, y pasa por los puntos:  $(1, 11/40)$ ;  $(0, 1/2)$ ;  $(5/7, 1)$ ;  $(105/149, 0)$ . La  $g$ -órbita de  $105/149$  no corta a  $I$ . Su código periódico es  $(A, B)$ .

Cuando el estado inicial es  $(0, 0)$ , la  $\psi$ -órbita es periódica y pasa por  $(1, 4/5)$ , desde donde salta a  $(0, 0)$ . Su código periódico es también  $(A, B)$ . Los lemas 4.2.1 y 4.2.2, dicen entonces que, para cualquier estado inicial, el código periódico es  $(A, B)$ .

**Ejemplo 4.3.4:**

Sean  $u_1(x) = 20 - x$ ;  $u_2(y) = 30 - y$ ;  $a(x) = -0.30$ ;  $b(y) \approx 0.14111$

Si el estado inicial es  $(0, 0)$  la  $\psi$ -órbita es periódica, y pasa por los puntos (coordenadas son aproximadas):  $(0.67, 1)$ ;  $(0.37, 0)$ ;  $(1, 0.97)$ , desde donde salta a  $(0, 0)$ . Su código periódico es  $(B, A, B)$ .

Cuando el estado inicial es  $(-0.28, 0)$ , entonces la  $\psi$ -órbita es periódica, y contiene a los puntos (con coordenadas aproximadas):

$(0.396, 1)$ ;  $(0.0096, 0)$ ;  $(0.7595, 1)$ ;  $(0.4595, 0)$ ;  $(1, 0.8299)$ ;  $(0, 0.9710)$ ;  $(0.02, 1)$ ;  $(-0.28, 0)$

La  $g$ -órbita de  $-0.28$  no corta a  $I$ . Su código periódico es  $(B, B, A, B)$ .

En este ejemplo ambos códigos periódicos se obtienen de órbitas periódicas que son ciclos límites. En efecto, la órbita de  $(0, 0)$  atrae todas las órbitas que pasan por el intervalo abierto  $I$ . Y la órbita por  $(-0.28, 0)$  es un atractor porque la derivada de  $g^2(x)$  en  $x = -0.28$  es menor que 1 ( $(g^2)'(x) \approx 0.96$ ).

#### 4.4 ESTABILIDAD DE LOS CÓDIGOS PERIÓDICOS

Diremos que los códigos periódicos de un sistema  $\phi_0 \in \mathcal{S}$ , son *persistentes*, si existe en  $\mathcal{S}$  un entorno  $\mathcal{U}$  de  $\phi_0$ , tal que todos los sistemas  $\phi$  en  $\mathcal{U}$  tienen los mismos códigos periódicos.

##### COROLARIO DE LOS TEOREMAS 3 Y 5

*Genéricamente, los sistemas con sinapsis no inhibitoria, tienen códigos periódicos persistentes.*

##### Pruebas

Sea la familia abierta y densa de sistemas, definida en la prueba del teorema 3. Para ella, los  $\omega$ -límites son órbitas periódicas persistentes. Por construcción de esa familia, las  $g$ -órbitas periódicas no pasan por  $\partial I$ . Entonces, o bien están en el interior de los arcos  $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ , o bien cortan al intervalo abierto  $I$ . Esta condición, para el período  $N$  fijo, es abierta en  $\mathcal{S}$ . Más aún, si el entorno en  $\mathcal{S}$  se elige suficientemente pequeño, la sucesión de arcos,  $\mathcal{A}_1$  ó  $\mathcal{A}_2$ , que contiene a cada iterado del punto periódico, y los números  $n_1$  y  $n_2$ , serán los mismos.

Por el lema 4.1.1, la sucesión de descargas  $\theta(x,0)$ , y, por lo tanto, los códigos periódicos, permanecen incambiables.  $\square$

##### Definición

Diremos que un código periódico, para un sistema dado, es *observable*, si el conjunto de estados iniciales cuyas sucesiones de descargas dan ese código, tiene interior no vacío.

Si ambos códigos periódicos de un sistema con sinapsis no inhibitoria coinciden, o si uno de ellos es no observable, el sistema será visto como si tuviera un único código.

##### COROLARIO DE LOS TEOREMAS 4 AND 5

*Existe una familia abierta de sistemas bineuronales que presentan un único código periódico.*

*Los sistemas con sinapsis excitatoria tienen solo un código periódico observable.*

##### Pruebas

La familia abierta de sistemas considerada en la prueba del teorema 4, tiene un único  $\omega$ -límite, periódico (la órbita de  $(0,0)$ ), que atrae a todas las demás. Del lema 4.2.2 sigue la primera afirmación del corolario.

De las definiciones, un código periódico es observable, si y solo si al menos uno de los  $\omega$ -límites periódicos que dan ese código, es un ciclo límite (es decir, un atractor). Tal como se demostró en el teorema 5, los sistemas con sinapsis excitatoria tienen un único ciclo límite, y por lo tanto un único código periódico observable.  $\square$



#### 4.5 CONCLUSION

Si la sinapsis biológica es no inhibitoria, entonces las neuronas auto-sincronizan, por medio del intercambio de pequeños pulsos. El sistema bineuronal actúa como una memoria de un código binario, y genéricamente es estable, en el sentido que los códigos no pueden ser cambiados con pequeñas perturbaciones del estado inicial, ni de los parámetros del sistema. Además, si la sinapsis es excitatoria, el código es insensible a la condición inicial.

La hipótesis de  $v_1$  y  $v_2$  positivos con *derivada negativa* significa, en sentido físico, que las neuronas se comportan como osciladores de relajación. Esta hipótesis ha sido esencial para obtener ciclos límites. La construcción de la sección 2 estaba, de hecho, basada en esa hipótesis: las transformaciones continuas a trozos pudieron ser regularizadas insertando tramos ficticios, para obtener una transformación continua e invertible.

## REFERENCIAS

- [1] W. de Mello: *Lectures on one dimensional dynamics*. 17 Coloquio Brasileiro de Matematica. IMPA. Rio de Janeiro (1980).
- [2] J.Palis-W.de Mello: *Geometric Theory of Dynamical Systems*. Springer (1982).
- [3] E.Coddington-N.Levinson: *Theory of ordinary differential equations*. Mc.Graw-Hill (1955).
- [4] C. Preston: *Iterates of piecewise monotone mappings on an interval*. Lectures notes in Math. N: 1847. Springer (1980).
- [5] A. Denjoy: *Sur les courbes definis par les equations differentielles a la surface du tore*. J.Math. Pure et Appl. 9, N. 11 (1932) 922-975.
- [6] A.Schwartz: *A generalisation of a Poincaré-Bendixon theorem to closed two dimensional manifolds*. Amer. Journ Math. 85 (1963)
- [7] W.Parry: *Symbolic dynamics and transformations of the interval*. Trans. Amer. Math. Soc. 122 (1966) 269-278.
- [8] J.P.Keener: *Chaotic behavior in piecewise continuous difference equations*. Trans. of Am. Math. Soc. vol. 261, N. 2 (1990) 589-604
- [9] R.Budelli - J.Torres - E.Catsigeras - H.Enrich: *Two neuron network*. Preprint.