

Neurodinámica  
Determinista

**NEURODINÁMICA DETERMINISTA.**  
**Matemática – Sistemas Dinámicos**  
**Redes Neuronales Acopladas por Impulsos.**

Leonardo Barboni y Eleonora Catsigeras - Editores Científicos

© Universidad de la República (Uruguay) 2016

Edición: Universidad de la República  
Av. 18 de Julio 1968 - Montevideo - Uruguay  
tel +598-2408-2906

Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0  
CC BY-NC-SA 3.0 US  
Puede reproducirse exclusivamente para fines legales no comerciales  
y con atribución explícita a datos de autores y edición.

ISBN 978-9974-0-1335-3 (papel)

ISBN: 978-9974-0-1335-3



ISBN 978-9974-0-1336-0 (electrónico)

ISBN: 978-9974-0-1336-0



# NEURODINÁMICA DETERMINISTA

MATEMÁTICA – SISTEMAS DINÁMICOS  
REDES NEURONALES ACOPLADAS POR IMPULSOS

LEONARDO BARBONI  
Y  
ELEONORA CATSIGERAS  
(editores científicos)

FACULTAD DE INGENIERÍA  
UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA  
MONTEVIDEO  
URUGUAY



## **Editores científicos**

Leonardo Barboni  
Eleonora Catsigeras

## **Lista de autores**

Marcos Barrios  
Eleonora Catsigeras  
Florencia Cubría  
Gonzalo De Polsi  
Victoria García Tejera  
Pierre Guiraud  
Agustín López de Lacalle  
Pilar Lorenzo  
Mauro Martínez

Los autores y editores científicos agradecen el financiamiento, durante el trabajo de investigación, redacción, edición y publicación de este libro, del proyecto “Neurodinámica” por L’Oréal-Unesco, Uruguay, 2014-2016, y del proyecto “PhySeCo”, por el programa regional MathAmSud 2016-2018 y por la Agencia Nacional de Investigación e Innovación (ANII).



# Índice general

<b>1. Modelos Biofísicos de Neuronas.</b>	<b>3</b>
1.1. Sobre redes neuronales . . . . .	5
1.2. Neurona biológica genérica . . . . .	7
1.2.1. Potencial de membrana y estado de equilibrio . . . . .	7
1.2.2. Potencial de acción . . . . .	9
1.3. Dos modelos biofísicos de la neurona sin sinapsis. . . . .	10
1.3.1. Modelo Hodgkin-Huxley (HH) . . . . .	10
1.3.2. Modelo FitzHugh-Nagumo (FHN) . . . . .	12
1.4. Modelos de Sinapsis . . . . .	14
1.4.1. Sinapsis química . . . . .	15
1.4.2. Sinapsis eléctrica . . . . .	16
1.5. Puntos de equilibrio y su estabilidad en el modelo FHN . . . . .	18
1.5.1. Puntos de equilibrio . . . . .	18
1.5.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio . . . . .	20
1.5.3. Excitabilidad . . . . .	23
<b>2. Sistemas de dos osciladores acoplados por impulsos.</b>	<b>25</b>
2.1. Las ecuaciones e hipótesis matemáticas del modelo . . . . .	28
2.1.1. Modelo de dos neuronas sin sinapsis. . . . .	28
2.1.2. Modelo de dos neuronas con sinapsis. . . . .	30
2.2. Dinámica asintótica del sistema no inhibitorio . . . . .	33
<b>3. Sincronización global de impulsos.</b>	<b>39</b>
3.1. Definición del modelo . . . . .	42
3.2. Estudio de $K_N$ . . . . .	50
3.3. Estudio de redes a partir de su grafo asociado . . . . .	57
3.3.1. Redes neuronales con $h \geq \theta$ . . . . .	60
3.4. Construcción de redes con gran coalición . . . . .	61

3.4.1.	Construcción de modelos con gran coalición a partir de grafos fuertemente conexos . . . . .	61
3.4.2.	Construcción de modelos con gran coalición a partir de grafos con forma de estrella . . . . .	65
<b>4.</b>	<b>Contractividad a trozos en redes inhibitorias.</b>	<b>69</b>
4.0.1.	Organización de este trabajo. . . . .	73
4.1.	Redes neuronales inhibitorias con grafo completo . . . . .	73
4.1.1.	Descripción general del modelo . . . . .	73
4.1.2.	Dinámica individual de la neurona (“Dinámica libre”) . . . . .	75
4.1.3.	Interacciones sinápticas . . . . .	77
4.1.4.	Hipótesis de interacciones eficientes . . . . .	79
4.2.	Construcción de la sección y del mapa de Poincaré. . . . .	80
4.2.1.	tiempos de disparo . . . . .	81
4.2.2.	Mapa de retorno (mapa de Poincaré). . . . .	84
4.3.	Contractividad del mapa de Poincaré . . . . .	86
4.3.1.	Definición de mapa contractivo a trozos . . . . .	86
4.3.2.	Continuidad a trozos del mapa de Poincaré . . . . .	87
4.3.3.	Resultados intermedios . . . . .	90
4.3.4.	Contractividad a trozos del mapa de Poincaré . . . . .	98
<b>5.</b>	<b>Redes con interacciones fuertes de cualquier signo.</b>	<b>103</b>
5.1.	Redes neuronal de tipo ID y mapa de retorno de Poincaré . . . . .	107
5.1.1.	Definición del modelo . . . . .	108
5.1.2.	El mapa de retorno de Poincaré . . . . .	110
5.2.	Propiedades de contracción del mapa de retorno . . . . .	115
5.2.1.	Existencia de una zona contractiva . . . . .	116
5.2.2.	Parámetros de contracción . . . . .	118
5.3.	Dinámica asintótica de las redes con neuronas inhibitorias . . . . .	123
5.3.1.	Los conjuntos estables y sensibles . . . . .	123
5.3.2.	Ciclos límites y caos débil . . . . .	125

## Prólogo

Este libro contiene las exposiciones y trabajos presentados en el Seminario de Neurodinámica, realizado durante los años 2014 y 2015 en el Instituto de Matemática y Estadística “Rafael Laguardia” (IMERL) de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República, Uruguay.

Se estudia un modelo matemático simplificado de red neuronal abstracta como sistema dinámico determinista, en el que cada neurona es del tipo “integración y disparo”, y la red está compuesta por un número finito arbitrariamente grande de neuronas acopladas por impulsos positivos o negativos instantáneos. El objetivo común es conocer la dinámica asintótica en el futuro de dichas redes, en particular condiciones suficientes para la sincronización global de impulsos y para la existencia de atractores periódicos (llamados ciclos límite).

La metodología de investigación utiliza herramientas básicas clásicas de la teoría matemática de los sistemas dinámicos, discretizando el sistema de tiempo real a intervalos de tiempo no constantes, mediante iteraciones del mapa de retorno a una sección de Poincaré.

Los capítulos son autocontenidos y mutuamente indepen-

dientes. El capítulo 1 es introductorio: revisa y fundamenta los modelos biofísicos de las neuronas en los que se basan los modelos matemáticos utilizados en los demás capítulos. El capítulo 2 relaciona el sistema formado por dos neuronas abstractas acopladas por impulsos, cuando por lo menos una de ella es excitatoria, con el número de rotación de un mapa de Poincaré en el círculo y el Teorema de Denjoy-Schwarz. Explica el fenómeno de sincronización de períodos de dos osciladores diferentes acoplados. El capítulo 3 enuncia y demuestra diversos teoremas nuevos en las que se dan condiciones suficientes para la sincronización global de impulsos en redes arbitrariamente grandes de neuronas excitatorias diferentes, con grafo de acoplamientos de diversas estructuras. El capítulo 4 trata de redes de neuronas diferentes e inhibitorias, demostrando que si las interacciones mutuas son eficientes, entonces el mapa de Poincaré es contractivo a trozos. El capítulo 5 trata redes de redes con cualquier número de neuronas idénticas, interacciones eficientes y cualquier signo (inhibitorio o excitatorio) de las interacciones mutuas.

Leonardo Barboni<sup>1</sup> y Eleonora Catsigereas<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup>Instituto de Ingeniería Eléctrica, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, correo electrónico: lbarboni@fing.edu.uy

<sup>2</sup>Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Ing. Rafael Laguardia”, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, Uruguay, correo electrónico: eleonora@fing.edu.uy

# Capítulo 1

## Modelos Biofísicos de Neuronas.

### Modelos de Hodgkin-Huxley y de FitzHugh-Nagumo.

Autor:

Gonzalo de Polsi<sup>1</sup>

Artículo extraído y adaptado del  
Capítulo 4 de la Tesis de Maestría en Física del autor.

Orientadora: Cecilia Cabeza<sup>2</sup>

Resumen, extracto y adaptación por Eleonora Catsigeras.

*MSC* 2010: Primaria: 92C20; Secundarias: 34D20, 37D05

*Palabras clave:* Neural bio physics, mathematical models, ordinary differential equations, stability.

---

<sup>1</sup>Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de la República, Correo electrónico: gdepolsi@fisica.edu.uy

<sup>2</sup>Instituto de Física, Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Correo electrónico: cecilia@fisica.edu.uy

.

## Modelos Biofísicos de Neuronas: Hodgkin-Huxley y FitzHugh-Nagumo.

Gonzalo De Polsi

### Resumen.

Exponemos el modelo bio-físico de neurona de Hodgkin-Huxley, sus fundamentos en la actividad electro-química de la membrana de la neurona, su interpretación en circuito eléctrico, y las ecuaciones diferenciales que lo traducen matemáticamente. De éste, extraemos el modelo simplificado de FitzHugh-Nagumo. Fundamentamos biológicamente la actividad de sinapsis química y eléctrica. Finalmente, analizamos matemáticamente la existencia y estabilidad de puntos de equilibrio en el sistema dinámico del modelo de FitzHugh-Nagumo, y la adecuación de los parámetros para la excitabilidad de la neurona.

### 1.1. Sobre redes neuronales

Las redes neuronales surgieron conceptualmente hacia finales del siglo XIX, cuando se concluyó que el procesamiento de la información, los conocimientos adquiridos, y en general la actividad cognitiva del ser humano, está sustentada en un gran número de unidades básicas, llamadas *neuronas*, que se interconectan entre ellas (interconexión denominada *sinapsis*) formando una estructura de *red*.

Sin embargo hoy en día, la expresión “redes neuronales” no solo se refiere a la estructura que forman las células del sistema nervioso y al funcionamiento de éstas, sino también a sistemas (abstractos o no) de procesamiento de información inspirados en el sistema nervioso. En esta última acepción, las redes neuronales son idealizaciones abstractas de sistemas artificiales, aunque utilizan como base algunas de las características del sistema nervioso biológico. Tienen por objetivo el procesamiento y cómputo artificial de información. Hoy en día, las unidades utilizadas en los procesadores de los computadores son mucho más rápidas que las del sistema nervioso biológico. A pesar de ello, por ejemplo la comprensión de un discurso, o la percepción visual que posee un ser humano, superan ampliamente el alcance de los computadores por varios órdenes de magnitud. Las redes neuronales artificiales (RNA) surgen entonces con la

intención de modelar algunas características de la actividad del sistema nervioso central, imitando los principios biológicos del funcionamiento cerebral para mejorar las capacidades de procesamiento y cómputo de dispositivos artificiales.

Las unidades básicas en las redes neuronales, tanto referidas al cerebro como a las RNA, son las neuronas. En la sección siguiente nos centraremos en algunos modelos físico-matemáticos de redes neuronales biológicas, principalmente en el modelo en que cada neurona está idealizada según el modelo de Hodgkin y Huxley, o según su reducción en el modelo de FitzHugh-Nagumo.

El cerebro presenta características muy interesantes, si se le compara con el desempeño de un computador artificial:

- Es robusto y tolerante a fallas. Las neuronas mueren a diario sin afectar el rendimiento.
- Es flexible. Se autoregula y aprende a adaptarse a nuevos ambientes.
- Puede interpretar y procesar información difusa, con ruido o inconsistente.

El desempeño eficiente del cerebro se realiza gracias a sus componentes. Está formado por un gran número de neuronas (aprox.  $10^{11}$ ), las cuales están acopladas con receptores y efectores que reciben los estímulos, los transfieren a las neuronas, y luego de procesarlo, los transmiten generando respuestas. Los estudios anatómicos y fisiológicos indican que desde el punto de vista organizativo, las neuronas del cerebro tienen un gran número de conexiones entre ellas, y forman patrones de interconexión muy complejos. Por otro lado, no hay un único tipo de neuronas, sino que hay varias diferentes con tipos de señales distintos. Estas señales provoca que las neuronas interactúen de forma altamente no lineal. A su vez estas interacciones dependen de muchos factores que varían con la acumulación de las experiencias cognitivas.

Se sabe que el cerebro se organiza en subredes, tanto desde el punto de vista funcional como anatómico. La densidad de conexiones internas a cada subred es muy alta, mientras que las conexiones a neuronas distantes o a otras subredes son con menor densidad. Este tipo de conectividad permite que, cuando el cerebro tiene que resolver un problema, cada una de estas subredes trabaja independientemente de las otras, pero de forma colectiva en sus salidas, logrando un procesamiento en paralelo masivo seguido de un procesamiento en serie o integrador de las señales.

## 1.2. Neurona biológica genérica

Existen varios tipos de neuronas diferentes en el sistema nervioso. Sin embargo, en su gran mayoría, comparten algunas características básicas [14, 1, 33]. Una neurona genérica podría verse como en la Figura 1.1. Básicamente, la neurona consiste en un cuerpo denominado *soma*, a partir del cual surgen muchas ramificaciones finas, llamadas *dendritas*. Las dendritas tienen como función conducir las señales eléctricas desde el exterior de la neurona *hacia* el soma de la neurona. (Más recientemente se supo de dendritas que también llevan señales desde el soma hacia otras neuronas [1]). A partir del soma surge también una fibra muy larga, llamada *axón*, que por lo general se divide en muchas fibras más finas, conocidas como *arborización axonal*. Las puntas de estas ramificaciones son las *terminales nerviosas* que inciden en las dendritas o somas de otras neuronas, incidencia que se conoce como *sinapsis*.

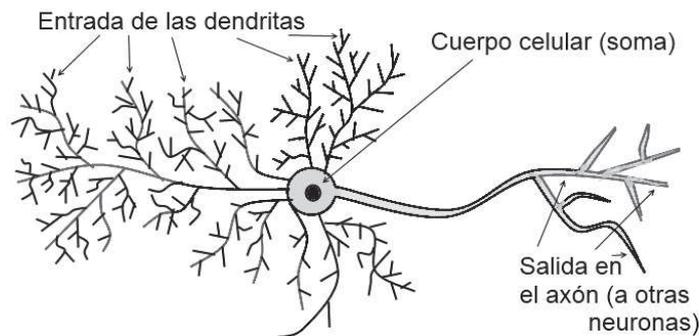


Figura 1.1: Esquema de una neurona genérica. (Figura inspirada en [14])

### 1.2.1. Potencial de membrana y estado de equilibrio

Una de las características centrales de las neuronas es la actividad eléctrica de su membrana que determina la forma en que se propagan los estímulos a lo largo de los axones y las dendritas. Esta actividad eléctrica se debe a que algunas sales presentes en el cuerpo se disocian en el medio intracelular y extracelular en iones positivos y negativos. Por ejemplo, los iones presentes son el ion positivo de potasio  $K^+$ , de sodio  $Na^+$  y de calcio  $Ca^{++}$  y el ion negativo de cloro  $Cl^-$ . La membrana de las neuronas, compuesta por dos capas de moléculas, presenta permeabilidades a cada tipo de ion, que depende de los canales iónicos (ver Figura 1.2), y del grado de apertura de estos canales. La variación en las permeabi-

lidades tiene como consecuencia la variación en las concentraciones de iones en el interior y el exterior de las neuronas, lo cual deriva en variaciones del llamado *potencial de membrana*: en general con un interior celular negativamente cargado respecto al exterior [26].

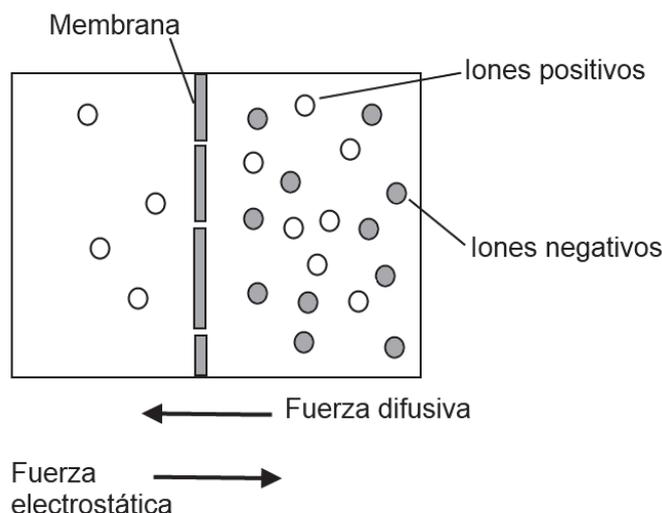


Figura 1.2: Esquema de la difusión de iones a través de la membrana neuronal. (Figura modificada de [35])

Este fenómeno se explica de la siguiente manera: considérese la Figura 1.2, en la cual se muestra una región extracelular (a la izquierda), una membrana con poros representando los canales iónicos, sólo permeables a un tipo de ion (por ejemplo, con carga positiva), y una región intracelular (a la derecha). Si inicialmente no hay iones en el exterior de la neurona, la difusión hará que a través de los canales fluyan iones positivos al exterior. A medida que el exterior aumenta su concentración de iones positivos, hay una disminución en el flujo neto debido a un menor gradiente de concentración. Por otro lado, comienza a generarse una fuerza electrostática, debido a la carga que se está acumulando en el exterior. Eventualmente se alcanza un equilibrio entre las fuerzas difusiva y electrostática, que en el ejemplo de la Figura 1.2) da lugar a un estado de equilibrio con el interior cargado más negativamente que el exterior [35].

En la neurona los flujos iónicos principales son los del sodio y el potasio. El potencial de equilibrio del potasio es cercano a los  $-80$  mV (interior

respecto al exterior), mientras que el del sodio es cercano a los 58 mV. Debido a que la membrana neuronal es bastante más permeable al potasio, el potencial de equilibrio está dominado mayoritariamente por éste, y como resultado, el potencial de membrana en el equilibrio resulta cercano a los -70 mV.

### 1.2.2. Potencial de acción

Un potencial de acción consiste en un pulso que se propaga a lo largo del axón de la neurona, y que se produce cuando el potencial de membrana de la neurona presenta lo que se llama una espiga (ver Figura 1.3). Cuando la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la neurona alcanza un cierto umbral (por ejemplo debido a corrientes externas inyectadas), los canales de sodio de la membrana se abren automáticamente y se produce un flujo positivo de iones de sodio hacia el interior de la neurona. Esta corriente iónica tiene como consecuencias una despolarización de la membrana, la que a su vez, provoca que los canales de potasio se abran, induciendo un flujo de iones de potasio hacia el exterior que restaura la diferencia de potencial original. Previo a retornar a la diferencia de potencial de equilibrio de la membrana, ésta pasa por un estado de hiperpolarización (es decir, yendo más allá del potencial de equilibrio). Todos estos fenómenos concatenados son lo que se conoce como *potencial de acción*, que se da en una región de la membrana y se propaga a lo largo de la misma.

La teoría del cable modela el fenómeno de la propagación del potencial de acción a lo largo de axones y dendritas. Consiste básicamente en dividir una dendrita o axón en partes muy pequeñas, cada una de las cuales se comporta como un circuito electrónico. Cada uno de esos circuitos está concatenado con el resto formando una especie de cable no lineal. Un análisis detallado de este modelo da lugar a una ecuación diferencial que describe la propagación del potencial de acción a lo largo del axón o de la dendrita.

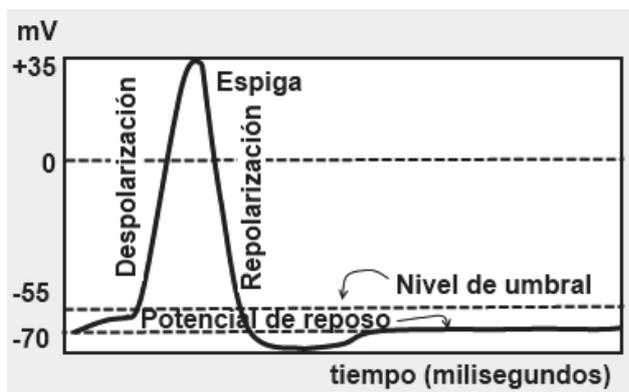


Figura 1.3: Esquema de la variación en el tiempo del potencial de membrana. La espiga que se propagará por el axón hacia otras neuronas, se produce al alcanzar el potencial de umbral por una despolarización rápida en la membrana de la neurona que emite la espiga. Al finalizar la espiga, el potencial de membrana vuelve rápidamente a su estado de reposo.

### 1.3. Dos modelos biofísicos de la neurona sin sinapsis.

#### 1.3.1. Modelo Hodgkin-Huxley (HH)

Los trabajos realizados por Hodgkin y Huxley en torno a la actividad eléctrica de la membrana del axón gigante de calamar, los llevaron a formular un modelo físico-matemático de esa actividad que reproduce una gran variedad de comportamientos de las neuronas [22]. Este modelo, denominado aquí HH, fue fundado a partir de mediciones y suposiciones sobre el axón del calamar, pero sus resultados lo conciben como el modelo más aceptado para describir la dinámica de las corrientes iónicas a través de la membrana de una neurona genérica. El modelo HH es el precursor de los modelos modernos de neuronas.

El modelo HH consiste en el sistema de ecuaciones diferenciales que exponemos más abajo en (1.1), e involucra cuatro variables dependientes del tiempo. Este modelo surge de varios trabajos previos en los cuáles Hodgkin y Huxley determinaron que el comportamiento del potencial de membrana se podía representar por un circuito eléctrico como el mostrado en la Figura 1.4.

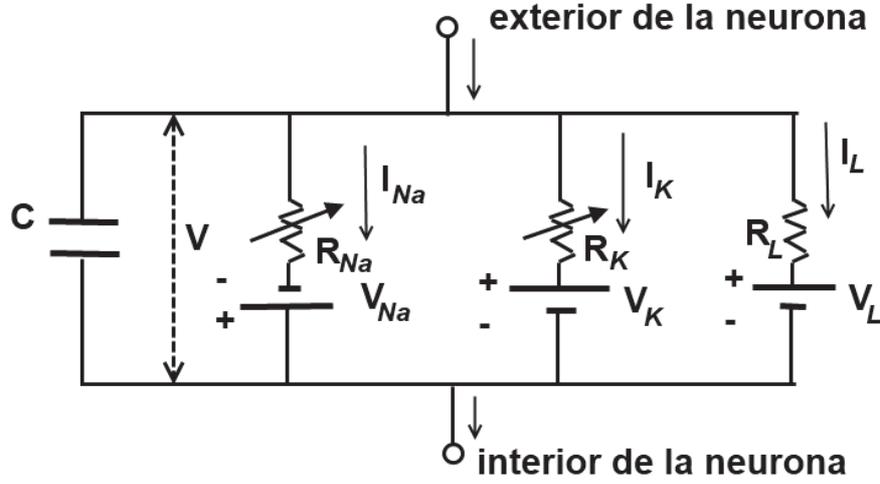


Figura 1.4: Circuito eléctrico de la membrana neuronal en el modelo de Hodgkin y Huxley (HH). La conductancia instantánea  $\bar{g}$  de cada rama es la inversa de la resistencia  $R$  respectiva, y es variable en función del potencial de membrana  $V$ . La dinámica de este modelo está gobernada por el sistema (1.1) de ecuaciones diferenciales. Es un sistema no lineal debido a la variación de las conductancias de las ramas de iones de sodio ( $Na$ ) y potasio ( $K$ ) en función de  $V$ .

Se presentan a continuación el sistema de ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica en el modelo HH:

$$\begin{aligned}
 C \frac{dV}{dt} &= -\bar{g}_K n^4 (V - V_K) - \bar{g}_{Na} h m^3 (V - V_{Na}) - \bar{g}_L (V - V_L) + I \\
 \frac{dm}{dt} &= \alpha_m(V)(1 - m) - \beta_m(V)m \\
 \frac{dn}{dt} &= \alpha_n(V)(1 - n) - \beta_n(V)n \\
 \frac{dh}{dt} &= \alpha_h(V)(1 - h) - \beta_h(V)h
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

donde

- $V$  es el potencial de membrana.
- $C$  es la capacitancia de la membrana.
- $I$  es una corriente externa aplicada.

- $m \in [0, 1]$  es una variable de activación de canales iónicos que determinan la permeabilidad de la membrana al pasaje del ion sodio.
- $n \in [0, 1]$  es una variable de activación de canales iónicos que determinan la permeabilidad de membrana al pasaje del ion potasio.
- $h \in [0, 1]$  es una variable de inactivación de canales iónicos que determinan la permeabilidad de membrana al pasaje del ion sodio.
- $\bar{g}_K$ ,  $\bar{g}_{Na}$  y  $\bar{g}_L$  son respectivamente la conductancia máxima de la membrana respecto al potasio, sodio y a fugas de corriente (principalmente debidas al ion cloro).
- $V_K$ ,  $V_{Na}$  y  $V_L$  representan los llamados potenciales de Nerst, que son potenciales de equilibrio para el ion potasio, sodio, y corriente de fuga respectivamente.
- Las seis funciones  $\alpha$ ,  $\beta$  subindexadas con  $m, n, h$  son fijas, determinadas experimentalmente, dependen del potencial instantáneo  $V$  de la membrana, y representan las tasas de cambio de las variables de activación y desactivación  $m, n$  y  $h$ .

### 1.3.2. Modelo FitzHugh-Nagumo (FHN)

A comienzo de los años 60, FitzHugh [18] observó que una determinada proyección de las variables en el espacio de fases del sistema HH, dado por las ecuaciones diferenciales (1.1), tiene un comportamiento dinámico con una escala de tiempo rápido (variables  $V$  y  $m$ ) superpuesta a una escala de tiempo más lenta (variables  $n$  y  $h$ ). Basado en esa propiedad, propuso un modelo más sencillo que el de HH, para reproducir la actividad de la membrana neuronal. En este modelo, los diferentes estados fisiológicos de la membrana neuronal, varían según la región visitada por las órbitas proyectadas desde el espacio de fases del sistema HH sobre un plano determinado por las siguientes dos variables:

$$u := V - 36 \text{ (medido en milivoltios)}, \quad w = \frac{n - h}{2}. \quad (1.2)$$

Posteriormente Nagumo, Arimoto y Yoshizawa [32] propusieron un circuito que era modelado por esas mismas ecuaciones de la proyección en dos variables del sistema FitzHugh. El circuito se representa en el cuadro izquierdo de la Figura 1.5, donde se introduce un diodo cuya curva característica se esquematiza en el cuadro derecho de esa misma figura. El modelo resultante es conocido como FitzHugh-Nagumo(FHN).

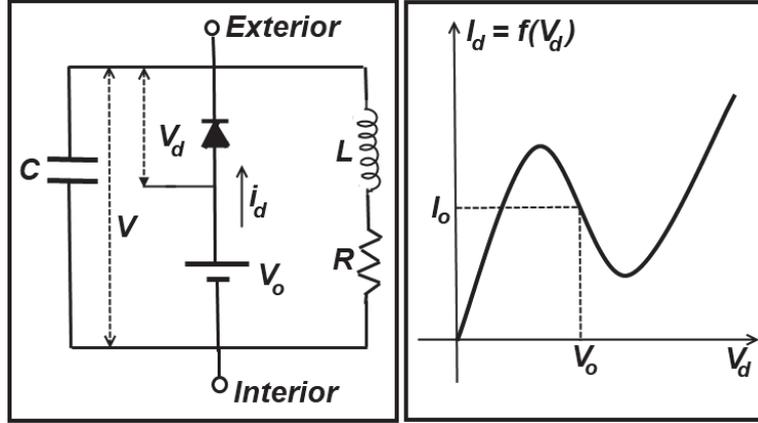


Figura 1.5: Cuadro de la izquierda: circuito eléctrico de la membrana neuronal en el modelo FitzHugh-Nagumo (FHN). El potencial de membrana es  $V$ . Es un sistema no lineal debido al diodo. Cuadro de la derecha: la curva funcional de diodo grafica su corriente  $I_d = f(V_d)$  en función de su diferencia de potencial  $V_d$ .

El sistema de ecuaciones diferenciales para el modelo FHN es el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= F_1(u, v) = -u(u-1)(u-a) - v \\ \frac{dv}{dt} &= F_2(u, v) = \varepsilon(u - bv + c) \end{aligned} \quad (1.3)$$

donde  $u$  y  $v$  son las variables dependientes del tiempo definidas en las igualdades (1.2), y  $a, b, c$  y  $\varepsilon$  son parámetros constantes en el tiempo.

Respecto al modelo HH, la variable  $u$  está asociada al potencial de membrana  $V$  y a la activación  $m$  del canal de sodio, mientras que la variable  $v$  está asociada a la activación  $n$  del canal de potasio y a la inactivación  $h$  del canal de sodio. El parámetro  $a$  está vinculado con el potencial de umbral de disparo del potencial  $V$  de membrana, que al ser alcanzado produce una espiga en tiempo corto, durante la evolución temporal  $V = V(t)$  (ver Figura 1.3). En el modelo FHN aparece como un parámetro adimensionado  $a$  en la función  $F_1$ . El parámetro  $\varepsilon$  ajusta las diferentes escalas de tiempo de las variables  $u$  y  $v$ , indicando que la constante de tiempo en la variación de  $v$  es mucho menor que la constante de tiempo en la variación de  $u$ . Finalmente, los parámetros  $b$  y  $c$  determinan la cantidad de estados de equilibrio y la estabilidad de los mismos. FitzHugh

puso restricciones en los parámetros para que el sistema mantenga su potencial de membrana de reposo en un único punto de equilibrio, hasta ser excitada externamente. En la Sección 1.5 analizaremos las condiciones en los parámetros para la existencia de un único estado de equilibrio (y por lo tanto un único potencial de membrana de reposo) asintóticamente estable, solución del sistema de ecuaciones diferenciales (1.3) en modelo FHN.

### Observación<sup>3</sup>:

En el modelo FHN, el sistema (1.3) de ecuaciones diferenciales consta de dos variables  $u, v$ . Como se dijo antes, debido al pequeño valor del parámetro  $\varepsilon$  en la segunda ecuación diferencial, la velocidad de cambio de la variable  $v$  es mucho más lenta que la de la variable  $u$ . Por ese motivo, una simplificación matemática que colapsa a tiempo cero los tiempos de duración de las espigas en el potencial de membrana (recordar que este es proporcional a  $u$ ), consiste en asumir que las espigas son instantáneas, mientras que la ecuación diferencial que gobierna el potencial de membrana es la primera ecuación del sistema (1.3) en la variable  $u$ , con  $v$  constante hasta que esta alcanza el potencial de umbral. Con esa simplificación, la variación en el tiempo del potencial de membrana está gobernada por una ecuación diferencial de primer orden, mientras el potencial no alcance al nivel de umbral y se produzca la espiga esquematizada en la figura 1.3. Esta última, en la simplificación matemática que utilizaremos, se traduce a un impulso instantáneo, como en el modelo de ecuaciones diferenciales impulsivas expuesto por Izhikevich en [26].

## 1.4. Modelos de Sinapsis

En la sinapsis, por lo general, la señal producida por una espiga en una neurona fluye hacia las otras neuronas desde las dendritas de estas últimas hacia el soma de ellas. La membrana de la terminal nerviosa de la neurona que emitió una espiga y propagó el flujo sináptico a lo largo de su axón, se denomina *membrana pre sináptica*. La membrana de la neurona receptora, en cuyas dendritas incide la terminal nerviosa, se denomina

---

<sup>3</sup>Esta observación fue agregada por Eleonora Catsigeras, al extraer el texto de este trabajo de la Tesis de Maestría del autor. La observación explica por qué los modelos matemáticos de neuronas utilizados en los demás trabajos de este libro, responden a ecuaciones diferenciales de primer orden en el potencial de membrana  $V$  de cada neurona

*membrana post sináptica.*

Existen dos tipos de sinapsis entre las neuronas [15]:

- la sinapsis química,
- la sinapsis eléctrica.

#### 1.4.1. Sinapsis química

Son las principales encargadas del flujo de información entre las neuronas. En la figura 1.6 se muestra la estructura biológica de la sinapsis química típica. Entre la terminal nerviosa, en el axón de la membrana pre sináptica, y la dendrita de la membrana post sináptica existe un pequeño espacio, llamado *hendidura sináptica*. El proceso de transmisión de información se produce por una emisión, hacia la hendidura sináptica, de sustancias químicas llamadas *neurotransmisores*. Estos están contenidos en pequeños paquetes denominados *vesículas sinápticas*. La emisión es debida a la llegada de un potencial de acción a la membrana pre sináptica. Los neurotransmisores se difunden a través de la hendidura sináptica hacia la membrana post sináptica, donde son captados por receptores ubicados en esta. Este proceso tiene por resultado un cambio en el potencial eléctrico de la membrana post sináptica.

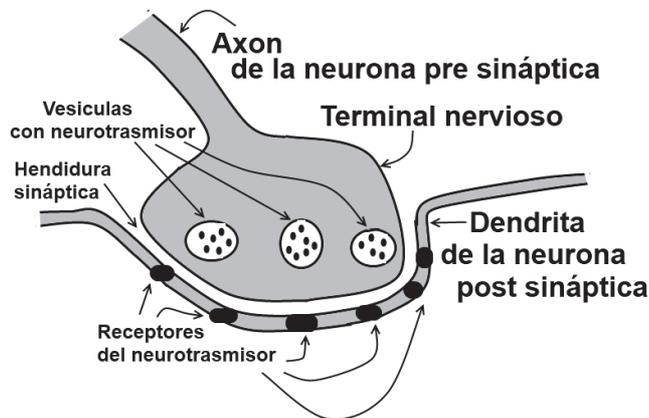


Figura 1.6: Esquema de la sinapsis química.

Según el efecto que causen los neurotransmisores en el potencial eléctrico de la membrana post sináptica, la sinapsis puede ser *excitatoria* o *inhibitoria*. Precisamente, si genera un aumento del potencial de membrana

de la neurona post sináptica, se dice que la sinapsis es excitatoria, y si genera una disminución es inhibitoria. Los modelos de estas sinapsis por lo general no consideran el proceso de difusión intermedio, ya que experimentalmente se constata que, debido a la estrechez de la hendidura sináptica, el tiempo requerido para la difusión de los neurotransmisores es mucho menor que el tiempo de proceso de emisión y recepción de estos. Algunos modelos de sinapsis química ajustan el cambio en el potencial  $V$  de la membrana post sináptica producido por la sinapsis, mediante el agregado de un término más en la primera ecuación diferencial del sistema (1.1). Este término agregado es similar a cualquiera de los sumandos de esa primera ecuación diferencial. Tiene una constante conductividad  $\bar{g}$  asociada al receptor del tipo de neurotransmisor involucrado, un factor entre 0 y 1 correspondiente a la fracción de canales iónicos que se abren durante la sinapsis, y una diferencia de potencial  $V - V_s$  entre el potencial de membrana  $V$  y al potencial de Nerst  $V_s$  del canal iónico correspondiente. A su vez, la fracción de canales iónicos que se abren durante la sinapsis está gobernada por una ecuación de diferencial en función del tiempo similar a las últimas tres ecuaciones del sistema (1.1), en la que aparecen parámetros que se determinan experimentalmente y dependen de la concentración de neurotransmisores en la hendidura sináptica.

#### 1.4.2. Sinapsis eléctrica

Desde el punto de vista biológico, la sinapsis eléctrica consiste en proteínas de la membrana neuronal que hacen de uniones (o canales) entre los citoplasmas de ambas neuronas, la pre sináptica y la post sináptica, ofreciendo una baja resistencia al flujo de iones y moléculas (ver Figura 1.7). Algunos iones y moléculas pueden pasar a través de estos canales generando una corriente. Debido a ello, estas sinapsis son mayoritariamente bidireccionales. Es decir, ambas neuronas pueden actuar mediante la misma conexión sináptica eléctrica, como pre y post sinápticas. Sin embargo, existen uniones de sinapsis eléctrica que restringen el flujo de corriente eléctrica en una única dirección. Debido a como es el proceso en este tipo de sinapsis, estas son más rápidas que las sinapsis químicas en un orden de magnitud. Por esta razón este tipo de sinapsis está presente frecuentemente en procesos que requieren una respuesta rápida, como por ejemplo en las neuronas involucradas a reacciones de reflejo defensivo, y en las neuronas de la retina.

Cuando este tipo de uniones vincula a muchas neuronas idénticas o si-

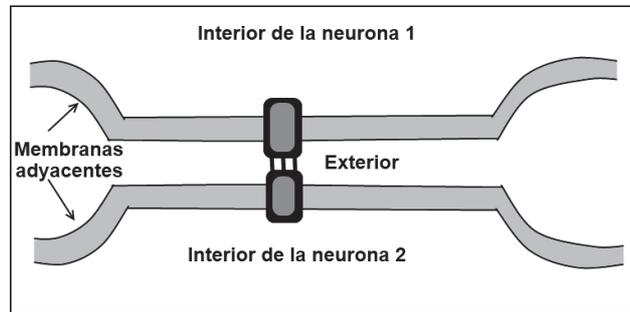


Figura 1.7: Esquema de la sinapsis eléctrica: unión proteica entre los citoplasmas de las membranas de ambas neuronas

milares, tiende a sincronizar los potenciales de acción de las mismas, y se comportan como una unidad. Experimentalmente, se encuentra que las sinapsis eléctricas no ocurren entre todos los tipos de neuronas. Se sabe que ocurren entre neuronas excitables, además de entre neuronas cardíacas y gliales [21].

La sinapsis eléctrica se modela matemáticamente en forma similar pero más sencilla, que la sinapsis química. Experimentalmente se constata que el cambio de potencial en la membrana post sináptica se puede aproximar mediante un término de corriente agregado a los sumandos de la primera ecuación del sistema (1.1). Dicha corriente es igual a una conductividad constante  $\bar{g}$  por la diferencia de potencial entre las neuronas involucradas. Por lo tanto el signo de dicha corriente depende de esta diferencia de potencial. La sinapsis eléctrica es esencialmente del tipo excitatorio, cuando los potenciales de umbral de ambas neuronas son similares.

## 1.5. Puntos de equilibrio y su estabilidad en el modelo FHN

### 1.5.1. Puntos de equilibrio

El modelo FHN dado por el sistema de ecuaciones diferenciales (1.3), puede tener uno, dos o tres puntos de equilibrio (órbitas que son puntos fijos). Para calcular cuántos y cuáles son estos puntos fijos, resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas, obtenidas de (1.3):

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F_1(u^*, v^*) = -u^*(u^* - 1)(u^* - a) - v^* = 0, \\ \frac{dv}{dt} &= F_2(u^*, v^*) = \varepsilon(u^* - bv^* + c) = 0.\end{aligned}\tag{1.4}$$

Del sistema (1.4) obtenemos

$$f(u^*) := u^{*3} - (1+a)u^{*2} + (a+b^{-1})u^* + cb^{-1} = 0\tag{1.5}$$

$$v^* = \frac{u^* + c}{b}\tag{1.6}$$

Ya que  $v^*$  adquiere un solo valor para cada valor de  $u^*$  debido a la ecuación lineal (1.6), a partir de la función  $f$  es posible obtener la cantidad de puntos fijos del sistema: tendrá uno, dos o tres puntos fijos según sea la cantidad de raíces de la función  $f(u^*)$ . La cantidad de puntos fijos, y el lugar de estos, varían de acuerdo a los valores de los parámetros  $b$  y  $c$  con  $a$  fijo, según la superficie dibujada en la Figura 1.8).

Analicemos los ceros de la derivada primera de la función  $f$ , y los valores de  $f$  en estos ceros:

$$f'(u) = 3u^2 - 2(1+a)u + a + b^{-1},$$

de donde se concluye el siguiente resultado:

**I)** El modelo FHN dado por el sistema (1.3) tiene un único punto fijo si se cumple alguna de las siguientes condiciones:

**I.1**  $(1+a)^2 \leq 3(a+b^{-1})$ .

**I.2**  $(1+a)^2 > 3(a+b^{-1})$ , y  $\{f(u_+) > 0 \text{ ó } f(u_-) < 0\}$ , donde

$$u_{\pm} := \frac{1+a \pm \sqrt{(1+a)^2 - 3(a+b^{-1})}}{3}.\tag{1.7}$$

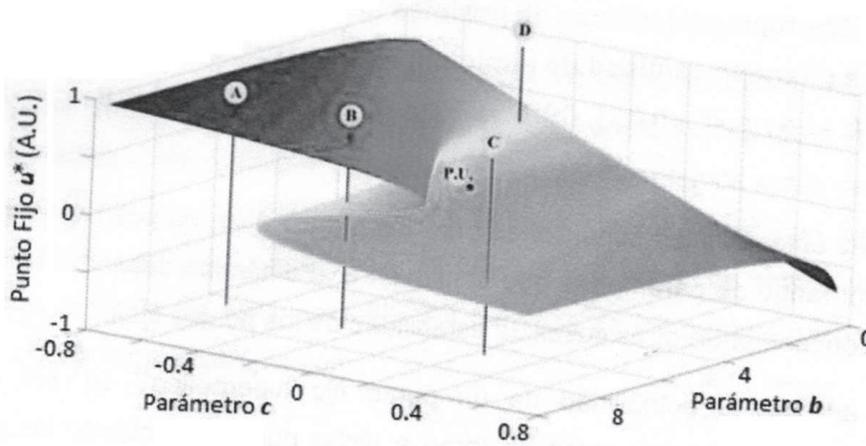


Figura 1.8: Superficie de puntos de equilibrio en el modelo FHN, en función de los parámetros  $b$  y  $c$ . En  $A$  y en  $C$  hay un único punto fijo estable, en  $B$  hay tres puntos fijos: uno inestable y dos estables, y en  $D$  hay dos puntos fijos, uno estable y otro inestable. El punto señalado como  $P.U.$  corresponde a valores de los parámetros con un único punto de equilibrio estable.

**II)** El modelo FHN dado por el sistema (1.3) tiene exactamente dos puntos fijos si se cumple alguna de las siguientes condiciones, donde  $u_+$  y  $u_-$  están dados por la igualdad (1.7):

**II.1**  $f(u_+) = 0$  y  $f(u_-) > 0$ .

**II.2**  $f(u_+) < 0$  y  $f(u_-) = 0$ .

**III)** El modelo FHN dado por el sistema (1.3) tiene exactamente tres puntos fijos si se cumplen las siguientes condiciones, donde  $u_+$  y  $u_-$  están dados por la igualdad (1.7):

**III.1**  $f(u_+) < 0$  y  $f(u_-) > 0$ .

En la figura 1.8, los puntos donde “dobla” la superficie son aquellos donde dos puntos de equilibrio colapsan en uno solo, y el tercero se mantiene. Es decir es el lugar donde hay exactamente dos puntos de equilibrio. Si se proyecta sobre el plano de los dos parámetros  $b, c$ , este lugar es una curva de bifurcación, que separa la región abierta de un solo punto de equilibrio, de la región abierta de tres puntos de equilibrio.

### 1.5.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

Sea un sistema de ecuaciones diferenciales de clase  $C^1$  en dos variables  $(u, v)$  que depende del tiempo:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= F_1(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= F_2(u, v),\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde las funciones  $F_1$  y  $F_2$  son de clase  $C^1$ . Esto significa que tienen derivadas parciales de primer orden continuas.

#### Definición 1.5.1. (Punto fijo hiperbólico)<sup>4</sup>

Un punto de equilibrio o punto fijo  $(u^*, v^*)$  del sistema 1.8 se llama *hiperbólico* si la matriz  $DF|_{(u^*, v^*)}$  Jacobiana del sistema, definida por

$$DF|_{(u^*, v^*)} := \left( \begin{array}{cc} \partial F_1 / \partial u & \partial F_2 / \partial v \\ \partial F_2 / \partial u & \partial F_2 / \partial v \end{array} \right) \Big|_{u = u^*, v = v^*}$$

tiene sus dos valores propios diferentes de cero.

El siguiente Teorema es básico de la teoría de los sistemas dinámicos diferenciables (ver por ejemplo [28], Theorem 6.3.1).

#### Teorema 1.5.2. Hartman-Großman

Un punto fijo hiperbólico  $(u^*, v^*)$  del sistema de ecuaciones diferenciales (1.8) de clase  $C^1$ , tiene las mismas propiedades de estabilidad o inestabilidad, que la del sistema lineal correspondiente. Más precisamente:

- a) Si los dos valores propios de la matriz Jacobiana son negativos, entonces  $(u^*, v^*)$  se llama *pozo*, es estable y asintóticamente estable.
- b) Si los dos valores propios de la matriz Jacobiana son positivos, entonces  $(u^*, v^*)$  se llama *fuelle*, no es estable ni asintóticamente estable, y todas las órbitas con estado inicial en un entorno reducido del punto de equilibrio se alejan de este.
- c) Si de los dos valores propios de la matriz Jacobiana, uno es positivo y otro es negativo, entonces  $(u^*, v^*)$  se llama *punto silla*, no es estable ni asintóticamente estable, pero tiene una “dirección” de estados iniciales en el espacio de fases (llamada *subvariedad estable*), cuyas órbitas convergen al punto fijo.

---

<sup>4</sup>Esta definición así como el enunciado del Teorema 1.5.2, fueron introducidos por Eleonora Catsigeras, al extraer el texto de este trabajo de la Tesis de Maestría del autor.

Apliquemos el Teorema 1.5.2 al sistema de ecuaciones diferenciales (1.7) que traduce matemáticamente el modelo bio-físico FHN de neurona. Obtenemos la siguiente matriz Jacobiana:

$$DF|_{(u^*, v^*)} := \begin{pmatrix} -3u^{*2} + (1+a)u^* - a - 1 & -1 \\ \epsilon & -\epsilon b \end{pmatrix}.$$

Sus valores propios, que determinan la estabilidad del punto fijo según la clasificación dada en el Teorema 1.5.2, son los siguientes:

$$\lambda_{\pm} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2},$$

donde

$$\tau = \text{traza}(DF|_{(u^*, v^*)}), \quad \Delta = \det(DF|_{(u^*, v^*)}).$$

Entonces, un punto fijo hiperbólico tendrá una matriz Jacobiana con sus dos valores propios con el mismo signo, y por lo tanto será pozo (estable) o fuente (inestable), cuando  $\Delta > 0$ . Según los parámetros del modelo, y teniendo en cuenta que  $\epsilon > 0$ , el determinante  $\Delta$  es positivo si y solo si:

$$3bu^{*2} - (1+a)bu^* + ab + 1 > 0.$$

Contrariamente, el punto fijo hiperbólico tendrá una matriz Jacobiana con los dos valores propios de signo diferente, y por lo tanto será punto silla (inestable), cuando  $\Delta < 0$ .

Concluimos lo siguiente:

**I)** El punto fijo  $(u^*, v^*)$  es un pozo, y por lo tanto estable y asintóticamente estable, cuando:

$$3bu^{*2} - (1+a)bu^* + ab + 1 > 0, \quad 3u^{*2} - (1+a)u^* + a + \epsilon b > 0.$$

**II)** El punto fijo  $(u^*, v^*)$  es una fuente, y por lo tanto inestable en un entorno del punto en todas las direcciones del espacio de fases, cuando:

$$3bu^{*2} - (1+a)bu^* + ab + 1 > 0, \quad 3u^{*2} - (1+a)u^* + a + \epsilon b < 0.$$

**III)** El punto fijo  $(u^*, v^*)$  es un punto silla, y por lo tanto inestable en todas las direcciones en un entorno del punto excepto a lo largo de su subvariedad estable en el espacio de fases, cuando:

$$3bu^{*2} - (1+a)bu^* + ab + 1 < 0.$$

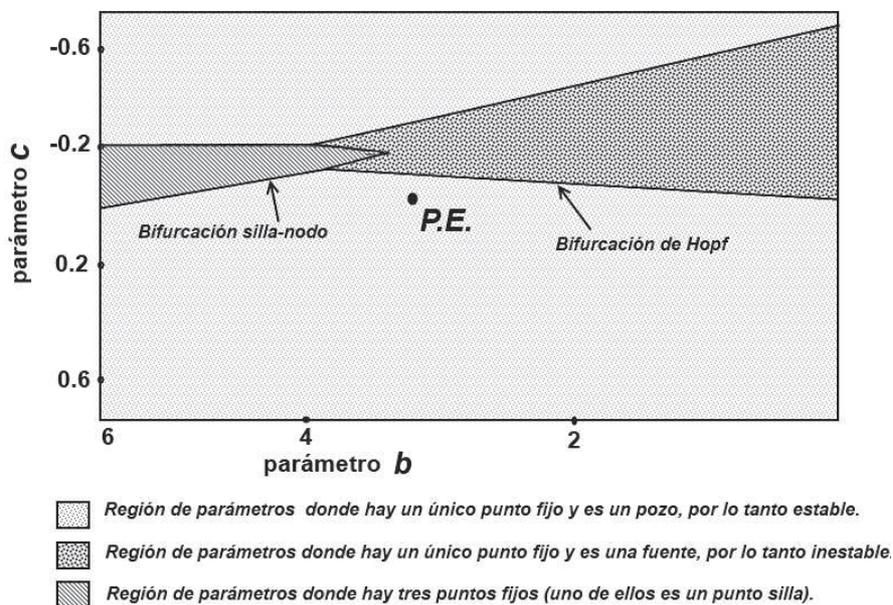


Figura 1.9: Regiones de parámetros  $(b, c)$  en el modelo FHN con diferentes cantidades de puntos de equilibrio o diferente estabilidad cuando el punto de equilibrio es único. El punto señalado como *P.E.* corresponde a valores de los parámetros donde el sistema modela una neurona *excitable*.

Combinando las condiciones de estabilidad de cada punto de equilibrio, con la discusión de la cantidad de estos según los valores de los parámetros  $(b, c)$  con  $a$  fijo, obtenemos el esquema de la Figura 1.9. En los valores de los parámetros que corresponden a las líneas que separan la región con un único punto de equilibrio de la región con tres puntos de equilibrio, se dan bifurcaciones de tipo silla-nodo, en las cuales se crean dos puntos fijos. Al tratarse de un sistema bidimensional, y como dicha bifurcación se da en dimensión uno, uno de los puntos fijos creados ha de ser un punto silla. Las otras bifurcaciones que aparecen se dan en las curvas entre la región de punto fijo único estable, y punto fijo único inestable. Estas corresponden a bifurcaciones de Hopf (ver por ejemplo [28], párrafo b, páginas 302–304)

### 1.5.3. Excitabilidad

En la Figura 1.9 la intersección de las regiones de parámetros que corresponden a un único punto fijo, y a la estabilidad de este, el sistema podrá ser *excitable* es decir el potencial de membrana podrá emitir espigas.

Decimos que un sistema dinámico cuya variable de estado es  $\vec{u}$  en función del tiempo, modela una neurona *excitable* cuando:

1. Posee un único punto estable  $\vec{u}^*$  y asintóticamente estable. Debido a la definición de estabilidad y de estabilidad asintótica se cumple lo siguiente:

Para todo  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeño, existe  $\delta > 0$  tal que  $\|\vec{u}(0) - \vec{u}^*\| < \delta$  implica  $\|\vec{u}(t) - \vec{u}^*\| < \epsilon$  para todo  $t \geq 0$ , y además  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \vec{u}(t) = \vec{u}^*$  cuanto  $t \rightarrow +\infty$ .

2. Existe una constante  $K > 0$  suficientemente grande en relación con el diámetro del espacio de fases  $U$  (por ejemplo  $K \geq 1/2 \text{diam}(U)$ ), y existe un nivel de perturbación  $|\theta| > 0$  llamado de *umbral* tal que, si  $\|\vec{u}(0) - \vec{u}^*\| \geq |\theta|$ , entonces  $\|\vec{u}(t) - \vec{u}^*\| \geq K$  para algunos valores de  $t$ .

La última condición podría hacerse sobre una componente determinada o sobre una dirección determinada de  $\vec{u} - \vec{u}^*$ , en vez de hacerlo sobre la norma de la diferencia. Por ejemplo, en el caso del sistema FHN donde la variable de estado es bidimensional  $(u, v)$ , y la componente real  $u$  representa (a menos de una traslación constante) el potencial de membrana de la neurona, se define el umbral de perturbación  $\theta$  respecto del punto fijo, únicamente en la variable  $u$ . Es decir, si  $(u^*, v^*)$  es el punto fijo, la perturbación de umbral es  $u(t) - u^* = \theta > 0$ .

La definición anterior de excitabilidad puede parecer difícil de chequear directamente en un sistema dado, ya que aparentemente requeriría conocer las órbitas. Sin embargo, veamos cómo se manifiesta la excitabilidad de la neurona en el modelo FHN dado por las ecuaciones diferenciales (1.3):

Tomemos valores de los parámetros tales que el punto fijo  $(u^*, v^*)$  es único, estable y asintóticamente estable (región sombreada más clara de la Figura 1.9), y además, que esté cercano a una bifurcación de Hopf. Por ejemplo, tomemos los valores de los parámetros en el punto indicado como *P.E.* de la Figura 1.9. La excitabilidad se debe a que el punto fijo está

cercano a perder su estabilidad y volverse inestable [26], en este caso mediante una bifurcación de Hopf. Luego de la desestabilización aparece un ciclo límite, con el punto fijo repulsor para valores de parámetros que modelan una neurona oscilatoria. El comportamiento de la neurona cambia sensiblemente durante la perturbación si esta supera un cierto umbral. En particular la introducción de una corriente constante a la neurona, es decir un término aditivo en la primera ecuación del sistema (1.3), se traduce en una neurona con una frecuencia de *disparo* (de emisión de espigas) definida, dada por el ciclo límite. Esa perturbación cesa en un período breve, y la neurona retorna a su punto de equilibrio estable. Se observa además que luego del disparo, aunque el sistema reciba estímulos tan grandes como los que provocaron su excitación, no podrá volver a hacerlo durante un cierto intervalo de tiempo, mientras esté atraído por su ciclo límite después de la bifurcación de Hopf. Este fenómeno se condice con el llamado *período refractario* de una neurona real biológica [40]. La excitabilidad de la neurona para valores adecuados de los parámetros, y la existencia del período refractario durante la excitación, son factores que hacen al sistema FHN uno de los modelos más simples que reproducen con buena fidelidad la actividad fisiológica de las neuronas biológicas.

## Capítulo 2

# Sistemas de dos osciladores acoplados por impulsos.

**Omega-límite periódico en sistemas de dos osciladores heterogéneos acoplados.**

Autora:

Victoria García Tejera<sup>1</sup>

Este trabajo fue realizado en el programa de introducción a la investigación de la autora bajo la orientación de Eleonora Catsigeras, en el marco del proyecto “Neurodinámica”, financiado por L’Oréal-Unesco, Uruguay, 2014-2016.

*MSC 2010:* Primarias: 34C15, 37E45; Secundarias: 34C05, 37N25, 92B20

*Palabras Clave:* Osciladores acoplados, ciclos límite, número de rotación.

---

<sup>1</sup>Ayudante de investigación del Proyecto “Neurodinámica”. Instituto de Matemática “Rafael Laguardia” (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay  
Correo electrónico: victoriagarciatejera@gmail.com

.

## Omega-límite periódico en sistemas de dos osciladores heterogéneos acoplados.

Victoria García Tejera

### Resumen.

Adoptamos un modelo matemático simple de dos osciladores de integración y disparo, que llamamos neuronas, acoplados por impulsos instantáneos, que modelan en forma simplificada las conexiones sinápticas entre neuronas biológicas. Demostramos que si la sinapsis no es totalmente inhibitoria (lo que denominamos “sistema no inhibitorio”), entonces siempre existen órbitas periódicas, y el omega-límite de cada una de las trayectorias es una órbita periódica. Este teorema fue enunciado y demostrado por primera vez, para dos sistemas de dos neuronas, en *Physica D*, Vol. 56 (1992), pp. 235–252.

### Introducción.

Consideramos dos osciladores acoplados por impulsos. Más precisamente, cada oscilador, cuando no está acoplado a otro, es del tipo de “neurona marcapasos”, con evolución periódica. Su variable de estado (que es el potencial de membrana en el caso del modelo biofísico más simple de una neurona biológica) evoluciona de forma de “integración y disparo” (ver por ejemplo [12]). Esto significa que la variable que describe el estado del oscilador evoluciona alternando la solución de una ecuación diferencial, que modela la carga eléctrica relativamente lenta de un condensador, con un régimen de disparo, relativamente rápido, producido por la descarga abrupta del condensador. Esta descarga abrupta es producida en modelos biofísicos de neuronas biológicas por la apertura brusca de ciertos canales iónicos en la membrana de la célula, cuando el potencial de membrana arriba a cierto valor de umbral. En este trabajo, suponemos que el disparo resetea el potencial de membrana desde el valor de umbral a cero, y se produce instantáneamente.

Adoptamos el modelo de acoplamiento entre dos osciladores  $A$  y  $B$  de integración y disparo, usualmente muy diferentes entre sí, del siguiente modo: cuando el estado de la neurona  $A$  arriba a su valor de umbral, además de resetearse a cero, produce un salto de discontinuidad, en el

estado instantáneo de la otra neurona  $B$ . Y recíprocamente. En este trabajo consideramos que ambos acoplamientos (de  $A$  hacia  $B$ , y de  $B$  hacia  $A$ ) son no nulos, y que al menos uno de los saltos de discontinuidad es positivo (llamado “sinapsis excitatoria”), aunque el otro puede ser positivo (excitatorio) o negativo (inhibitorio). Llamamos a un tal sistema, red bineuronal no inhibitoria, porque no son ambos acoplamientos inhibitorios. El sistema es heterogéneo en el sentido que ambos osciladores pueden ser muy diferentes entre sí, y los acoplamientos signados y direccionados, tener amplitudes también muy diferentes entre sí.

El objetivo de este trabajo es demostrar el Teorema 2.2.4, extraído de [6], que establece que en una red bineuronal no inhibitoria, siempre que las funciones que definen precisamente el modelo sean de clase  $C^2$ , el omega-límite de cada una de las órbitas es una órbita periódica.

## 2.1. Las ecuaciones e hipótesis matemáticas del modelo

### 2.1.1. Modelo de dos neuronas sin sinapsis.

El potencial que posee una neurona marcapasos  $i$ , se puede representar mediante una variable real  $x = x(t)$ , en función del tiempo  $t$ , cuyo valor varía en un intervalo  $[-V, 1]$  (donde  $V$  es una constante positiva). La función  $x$  es creciente en el tiempo  $t$ . Más precisamente,  $x(t)$  es solución de la ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = u_i(x),$$

donde  $u_i : [-V, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u_i \in C^2$ , es una función real positiva y con derivada primera negativa. Esto implica que  $x(t)$  crece con  $t$ , pero cada vez más lentamente.

El 1 en el intervalo  $[-V, 1]$ , representa lo que llamaremos *potencial umbral* de la neurona, y que en este caso se encuentra normalizado, mediante un cambio de escala de la variable  $x$ . Cuando este umbral es alcanzado, diremos que la neurona “descarga”, y su potencial, por convención, regresa al valor 0 en forma instantánea (ver Figura 2.1).

Podemos interpretar  $x$  como un punto variable en el círculo  $S^1$  de radio 1, al identificar como un solo punto los dos extremos del intervalo  $[0, 1]$  donde varía  $x$ , siempre que la neurona (más precisamente su variable

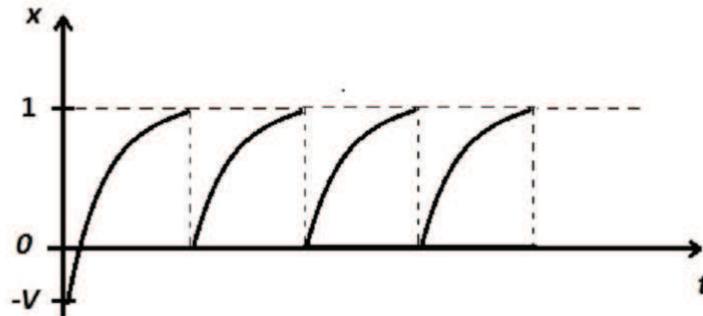


Figura 2.1: Evolución del potencial de una neurona aislada a lo largo del tiempo

de estado  $x$ ) no reciba impulsos negativos del exterior, ni sea forzada a adquirir valores por abajo de 0.

En el caso de dos neuronas, denotamos sus potenciales como  $x(t)$  e  $y(t)$  respectivamente. Si ellas *no interactuaran entre sí*, y estuvieran aisladas del exterior, podemos interpretar la evolución en el tiempo del sistema formado por ambas neuronas, como un sistema dinámico bidimensional. Más precisamente, el estado  $(x(t), y(t)) \in [0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$  como función del instante  $t$ , sería solución del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales desacopladas:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u_1(x) \\ \frac{dy}{dt} = u_2(y). \end{cases} \quad (2.1)$$

Si en el cuadrado  $[0, 1]^2$  identificamos los estados  $(0, y) \sim (1, y)$  y  $(x, 0) \sim (x, 1)$ , entonces el estado  $(x(t), y(t))$  en cada instante  $t$ , es un punto del toro bidimensional  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ . Por lo tanto podemos la solución general del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1), como un sistema dinámico en el toro  $\mathbb{T}^2$  (ver Figura 2.2). Se llama órbita con estado inicial  $(x(0), y(0))$  a la curva paramétrica  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  con  $t \geq 0$ , que corresponde a la solución particular del sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) con condición inicial correspondiente al estado  $(x(0), y(0))$  dado. Así las órbitas en cada punto por donde pasan son tangentes al campo  $(u_1, u_2)$  en el fibrado tangente del toro  $\mathbb{T}^2$ . Es fácil ver, entonces, que en el

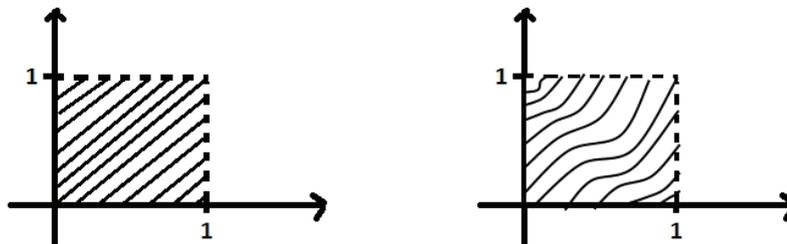


Figura 2.2: Órbitas en el toro  $\mathbb{T}^2$  del sistema formado por dos neuronas desacopladas (es decir, sin sinapsis). A la izquierda, cuando las dos neuronas son idénticas. A la derecha, un ejemplo cuando son diferentes.

caso particular que las dos neuronas sean idénticas (es decir  $u_1 = u_2$ ), las órbitas del sistema formado por ambas, desacopladas, son los segmentos de recta de pendiente 1, en el cuadrado  $[0, 1]^2$ , o equivalentemente, en el toro  $\mathbb{T}^2$  (Figura 2.2, cuadro de la izquierda). En el caso general que estudiaremos, las neuronas no son necesariamente idénticas. Es decir, podrán ser diferentes las funciones  $u_1$  y  $u_2$  en el segundo miembro de la ecuación diferencial bidimensional (2.1), y por lo tanto el campo vectorial  $(u_1, u_2)$  no necesariamente tiene pendiente 1, y depende del punto  $(x, y) \in \mathbb{T}^2$  considerado. En la Figura 2.2, cuadro de la derecha, se representan las órbitas, es decir las curvas tangentes al campo vectorial  $(u_1, u_2)$  en el toro, en un ejemplo en que las dos funciones componentes de este campo son diferentes.

### 2.1.2. Modelo de dos neuronas con sinapsis.

La interacción entre dos neuronas biológicas se llama *sinapsis*. Ocurre cuando una de las neuronas, llamada *presináptica*, alcanza su umbral y descarga, produciendo con esta descarga un cambio, (salto), en el potencial de la otra neurona, llamada *postsináptica*.

Consideraremos aquí solo el caso de dos neuronas  $A$  y  $B$ , en que ambas conexiones sináptica, la de  $A$  hacia  $B$ , y la de  $B$  hacia  $A$ , son no nulas. Cada interacción sináptica puede ser *excitatoria*, cuando el salto que produce la neurona presináptica en la otra neurona es positivo; o *inhibitoria*, cuando el salto que produce es negativo. La neurona presináptica

se dice excitatoria (inhibitoria) si el salto que produce en la otra neurona es positivo (negativo).

El sistema compuesto por ambas neuronas puede a su vez ser de tres tipos diferentes: *excitatorio*, si ambas neuronas son excitatorias; *inhibitorio*, si ambas neuronas son inhibitorias; o *combinado*, si está compuesto por una neurona inhibitoria y otra excitatoria. Diremos que el *sistema es no inhibitorio*, si es o bien excitatorio, o bien combinado.

Veamos por ejemplo un sistema combinado de dos neuronas (ver Figura 2.3):

Supongamos que la neurona  $A$  es excitatoria, y cuando esta descarga, hace que la neurona  $B$ , que supondremos inhibitoria, sobrepase su umbral. En este caso, ambas neuronas regresan al potencial 0, tras descargar, por convención.

Por otro lado, saltos negativos en la neurona  $A$ , debidos a la descarga de la neurona  $B$ , pueden hacer que  $A$  alcance un potencial negativo. Esto puede pasar, pero sin embargo el potencial de  $A$  queda acotado inferiormente por el valor  $-V_A$ .

Más precisamente, la sinapsis entre dos neuronas en un sistema combinado, se regirá según la función:

$$f : \{(x, y) \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1] : x = 1 \text{ o } y = 1\} \longrightarrow \{(x, y) : x = 0 \text{ o } y = 0\},$$

que queda determinada mediante las siguientes igualdades:

(i)  $f(x, 1) = (x + a(x); 0)$ ,  
 $f(1, y) = (0, y + b(y))$  si  $x + a(x) \leq 1$ ,  $y + b(y) \leq 1$ .

(ii)  $f(x, 1) = (0, 0)$ ,  $f(1, y) = (0, 0)$ , si  $x + a(x) > 1$  o  $y + b(y) > 1$ .

Observamos además que si  $a(1) < 0$  entonces  $f(1, 1) = (1 + a(1), 0)$ , y si  $a(1) > 0$  entonces  $f(1, 1) = (0, 0)$ .

Asumiremos además las siguientes condiciones:

**Hipótesis H)** Los saltos representados por las funciones reales  $a$  y  $b$ , definidas en  $[-V_A, 1]$  y  $[-V_B, 1]$  respectivamente, son de clase  $C^2$ , de signo constante (nunca cero),  $|a|$ ,  $|b|$  son no decrecientes, y  $x + a(x)$  y  $y + b(y)$  son estrictamente decrecientes.

Pedimos que  $|a|$  y  $|b|$  sean no decrecientes, ya que en las neuronas biológicas, los potenciales post-sinápticos son menores después de una descarga que en fases posteriores.

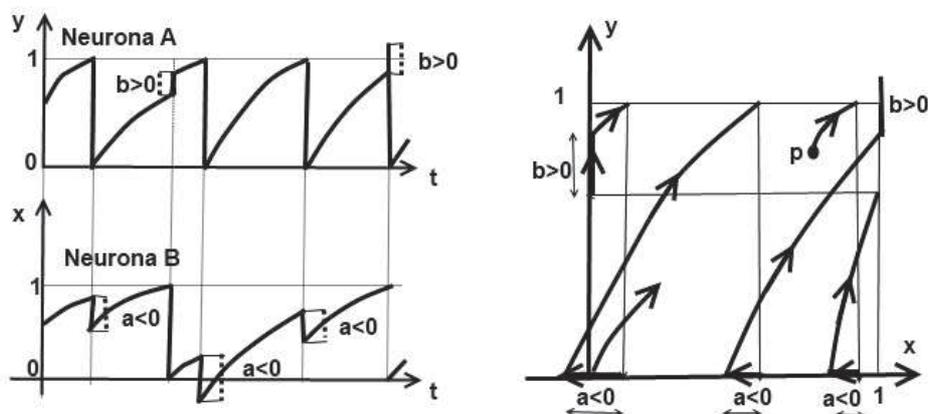


Figura 2.3: En el cuadro de la izquierda, evolución en función del tiempo de los estados  $(x, y)$  de dos neuronas  $B$  y  $A$  respectivamente, acopladas con sinapsis  $a < 0$  (neurona  $A$  inhibitoria, disminuye el potencial  $x$  de la neurona  $B$ ) y  $b > 0$  (neurona  $B$  excitatoria, aumenta el potencial  $y$  de la neurona  $A$ ). En el cuadro de la derecha, la órbita correspondiente en el toro  $[0, 1]^2$ . El estado inicial es el punto  $p$ . Los saltos de discontinuidad negativos, en el eje de las  $x$  son  $a = a(x) < 0$ , y los saltos de discontinuidad positivos son  $b = b(y) > 0$ .

La dinámica bineuronal está dada por la función:  $\psi(\rho, t)$  que para cada condición inicial  $\rho \in [-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$ , y para todo tiempo  $t \leq 0$ , nos da el estado del sistema en el instante  $t$ . Esta función  $\psi$  no será continua en el conjunto  $\{x = 1 \text{ o } y = 1\} \subset \mathbb{T}^2$ .

Por lo que hemos visto, en este modelo matemático el sistema bineuronal queda unívocamente determinado por cuatro funciones reales  $(u_1, u_2, a, b)$ , con las propiedades mencionadas anteriormente, y dos constantes negativas  $-V_A, -V_B$ . Para valores fijos de las constantes  $-V_A$  y  $-V_B$ , el espacio de sistemas bineuronales será el espacio topológico formado por todas las cuadruplas de funciones  $(u_1, u_2, a, b)$  que cumplen todas las hipótesis mencionadas anteriormente, y con la topología producto de la topología usual en  $C^1$ .

Dado un sistema  $s$ , nos interesa estudiar el comportamiento dinámico asintótico en el futuro de sus órbitas  $\{\psi(\rho, t)\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ . Analizaremos ese comportamiento en la próxima sección.

## 2.2. Dinámica asintótica del sistema no inhibitorio

En esta sección definiremos un mapa de Poincaré continuo para el sistema bineuronal, que nos permitirá analizar el comportamiento asintótico de sus órbitas. Para esto, ajustaremos la función  $\psi$  para que sea continua, “rellenando” los saltos, agregando lapsos de tiempo ficticios en los que el flujo  $\psi$  recorre los saltos de discontinuidad. De hecho, en las neuronas biológicas los saltos no se producen de manera instantánea si no que requieren de un determinado tiempo positivo para realizar la descarga. Llamaremos “regularización del sistema” a ese proceso de rellenar los saltos de discontinuidad de  $\psi$  en lapsos de tiempo ficticios.

Para poder usar la estrategia descrita más arriba, definir mediante ella el mapa de Poincaré, y finalmente estudiar sus propiedades dinámicas, necesitaremos un lema previo:

**Lema 2.2.1.** *Si la función  $a : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  es negativa y  $|a|$  es suficientemente pequeño, existen números  $r_0$  y  $r_1$  e instantes  $t_0, t_1 > 0$  tales que:*

$$0 < r_0 < r_1 < 1, \quad (0, r_0) = \psi(a(0), 0, t_0) \text{ y } (1, r_1) = \lim_{t \rightarrow t_1^-} \psi(1 + a(1), 0, t), \quad (2.2)$$

donde el flujo  $\psi((x, y), t)$  es tangente al campo  $(u_1(x), u_2(y))$ .

*Demostración:* Por definición

$$\lim_{t \rightarrow t_1^-} \psi(x, 0, 0) = (1, 0) \text{ y } \frac{d\psi}{dt} = (u_1, u_2).$$

Como  $u_1 > 0$ , cada órbita dada por  $\{\psi(x, y, t)\}_{t \geq 0}$  es transversal a las verticales  $x = \text{constante}$ , en el cuadrado  $[-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$ . Por el teorema de la función implícita, existen  $r_0$  y  $r_1$  que verifican la ecuación (2.2).

Veamos que  $r_0 < r_1$ . Tenemos:

$$\int_{a(0)}^0 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_0^{r_0} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_0^{t_0} dt = t_0,$$

$$\int_{1+a(1)}^1 \frac{dx}{u_1(x)} = \int_{a(1)}^0 \frac{dx}{u_1(x+1)} = \int_0^{r_1} \frac{dy}{u_2(y)} = \int_0^{t_1} dt = t_1.$$

Como  $|a| = -a$  es no decreciente, y como  $u_1$  decrece, se obtiene:

$$\int_{a(0)}^0 \frac{dx}{u_1(x)} < \int_{a(0)}^0 \frac{dx}{u_1(x+1)} \leq \int_{a(1)}^0 \frac{dx}{u_1(x)}.$$

Luego,  $t_0 < t_1$  y como  $u_1$  es positivo y  $a < 0$ , concluimos  $r_0 < r_1$ .  $\square$

### Regularización $\phi$ del flujo real $\psi$ .

De aquí en adelante, asumiremos que  $b > 0$ , o sea, el sistema es no inhibitorio: si  $a > 0$  el sistema será excitatorio, y si  $a < 0$  el sistema será combinado.

Consideramos  $[-V_A, 1] \times [-V_B, 1]$  donde el campo  $(u_1, u_2)$  está definido. Sea  $k > 1$  una constante real tal que

$$k + a(0) > 1.$$

Teniendo en cuenta que por hipótesis  $x+a(x)$  e  $y+a(y)$  son estrictamente decrecientes, y usando el Lema 2.2.1, construimos un campo  $\chi$  en el plano, de clase  $C^2$  sin singularidades, tal que cumple las siguientes condiciones (ver en la Figura 2.4 el flujo tangente  $\phi$  al campo  $\chi$ ):

1)  $\chi(x, y) = (u_1(x), u_2(y))$  si  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Por lo tanto cuando se restringe al cuadrado  $[0, 1] \times [0, 1]$  el flujo  $\phi$  tangente al campo  $\chi$ , coincide con el flujo real  $\psi$ . Pero además el flujo  $\phi$  está definido en la banda vertical  $\{1 \leq x \leq k\}$  y en la banda horizontal  $\{1 \leq y \leq k\}$ .

2)  $\chi(x, y) = \chi(x+k, y) = \chi(x, y+k)$  para todo  $(x, y)$ . Por lo tanto es un campo en el toro  $[0, k] \times [0, k] / \sim$  después de identificar  $x = 0$  con  $x = k$ , e  $y = 0$  con  $y = k$ .

3) El flujo  $\phi(x, y, t)$  tangente al campo  $\chi$  verifica:

(i)  $\phi(1, y, t_y) = (k, y + b(y))$  para algún  $t_y > 0$ , y para todo  $y \in [r_1, 1]$  tal que  $y + b(y) \leq 1$ , donde  $r_1 = 0$  si  $a > 0$ , y está definido como en el Lema 2.2.1 si  $a < 0$ .

(ii)  $\phi(1, x, t_x) = (x + a(x), k)$  para algún  $t_x > 0$ , y para todo  $x \in [0, 1]$  tal que  $x + a(x) \leq 1$ .

5) La segunda componente de  $\chi(x, 0)$  es positiva para todo  $x$ .

6) Si  $x_0 \in [k + a(0), k]$ , entonces el arco de curva  $\phi(x_0, 0, t)$  para  $t > 0$  contenido en  $[1, k] \times [0, k]$ , es tangente en cada punto  $(x, y)$  al campo de vectores  $\chi(x, y) = (u_1(x-k), u_2(y))$ .

**Nota:** La condición 6) se aplica solo en el caso  $a < 0$ ; de otro modo no tendría sentido considerar el intervalo  $[k + a(0), k]$ .

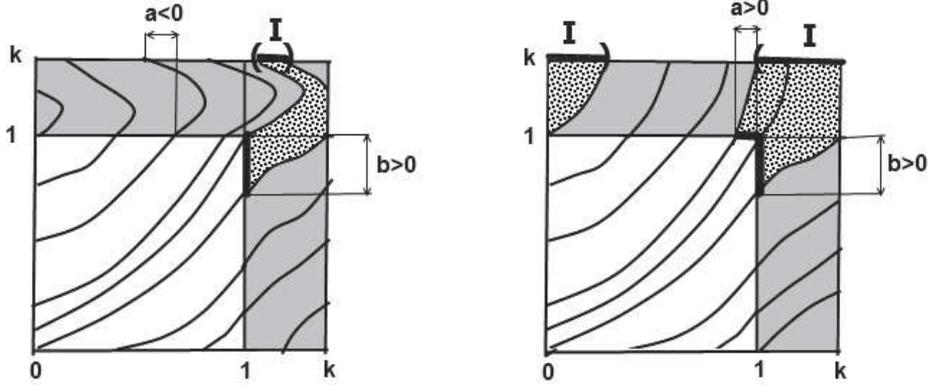


Figura 2.4: Regularización del flujo  $\psi$ , extendiéndolo del cuadrado  $[0, 1]^2$  al cuadrado  $[0, k]^2$ . A la izquierda el caso  $a < 0, b > 0$ . A la derecha el caso  $a > 0, b > 0$ . La zona blanca es donde el flujo regularizado  $\phi$  coincide con el flujo real  $\psi$ . Las zonas sombreadas y punteadas corresponden al flujo ficticio  $\phi$ . Las zonas punteadas no se alcanzan nunca, pues corresponden a las órbitas para las cuales una neurona excitatoria llega al umbral 1, y provoca un salto positivo en la otra neurona que también la hace llegar al umbral 1. Por lo tanto, las órbitas del flujo ficticio  $\phi$  que chocan con el intervalo  $I$ , indican que las órbitas reales, en el momento de chocar con la zona punteada, saltaron instantáneamente a  $(0, 0)$ .

Identificando  $x = k$  con  $x = 0$  y el lado  $y = k$  con  $y = 0$  en el cuadrado  $[0, k] \times [0, k]$ , la construcción anterior determina un campo de clase  $C^2$  en  $\mathbb{T}^2$  cuyo flujo  $\phi$  estará relacionado con el flujo  $\psi$ . Denotaremos por  $(x, y)_{\text{mód}.k}$  al elemento de  $\mathbb{T}^2$  correspondiente al punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Sea

$$I := \{(x, y)_{\text{mód}.k} : y = k, 1 + a(1) < x < k + a(0)\} \text{ si } a < 0, \quad \text{e}$$

$$I := \{(x, y)_{\text{mód}.k} : y = k, 1 < x < a(0)\} \text{ si } a > 0.$$

Observamos que la órbita  $o_\psi(\rho)$  queda determinada por la órbita  $o_\phi(\rho)$ , mientras ésta no alcance el intervalo  $I$ . Cuando lo alcanza, la órbita  $o_\psi(\rho)$  vuelve a  $(0, 0)$ .

**Definición 2.2.2. Mapa de Poincaré.**

Sea  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) / 0 \leq x \leq k, y = 0\} / \sim$ , donde  $\sim$  es la relación de equivalencia que identifica los extremos  $x = 0$  y  $x = k$ . Sea  $g(x)$  el primer punto de regreso a  $\mathbb{S}^1$  de la órbita  $\phi(x, 0, t)$  para  $t > 0$ , con  $x \in \mathbb{S}^1$ . Como las órbitas cortan a  $\mathbb{S}^1$  transversalmente, la aplicación  $g$  queda bien definida, y resulta ser un difeomorfismo de clase  $C^2$  en  $\mathbb{S}^1$ . Esta aplicación  $g : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$  será, por definición, el *Mapa de Poincaré regularizado* del sistema bineuronal.

Sea  $g : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$  un homeomorfismo en el círculo  $\mathbb{S}^1$  que preserva la orientación. Consideramos cada punto del círculo  $\mathbb{S}^1$  escrito de la forma  $e^{2\pi ix}$  donde  $x \in \mathbb{R}$  está definido módulo 1. De este modo, existe (aunque no es única) una aplicación continua  $\tilde{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  tal que

$$g(e^{2\pi ix}) = e^{2\pi i\tilde{g}(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

La aplicación continua  $\tilde{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  se llama *un levantamiento de  $g$  a  $\mathbb{R}$* .

Sea  $\tilde{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  un levantamiento del homeomorfismo  $g : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ . Entonces existe, para todo  $x \in \mathbb{R}$  el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tilde{g}^n(x) - x}{n} = \rho, \quad (2.3)$$

y además ese límite no depende del punto  $x$  ni del levantamiento  $\tilde{g}$  elegidos (ver por ejemplo [28], páginas 387–388).

**Definición 2.2.3. Número de rotación.**

Al real  $\rho$  definido por la igualdad (2.3) se le llama *número de rotación* del homeomorfismo  $g$  en el círculo.

Ahora enunciaremos y demostraremos el resultado principal de este paper:

**Teorema 2.2.4. (Ciclos límites en redes bineuronales [6])**

*En un sistema bineuronal no inhibitorio siempre existen órbitas periódicas, y para todo estado inicial, el  $\omega$ -límite es una órbita periódica.*

*Demostración:* Dado cualquier estado inicial  $p$ , sea  $q = (x, 0)$  tal que  $q = \psi(p, t_p)$  para algún  $t_p$  positivo. Estudiaremos la órbita discreta en el futuro de  $(x, 0)_{\text{mód. } k} \in \mathbb{S}^1$ , por los iterados del mapa de Poincaré  $g : \mathbb{S}^1 \mapsto \mathbb{S}^1$ .

El teorema de Denjoy-Schwarz establece que si el difeomorfismo  $g$  en el círculo es de clase  $C^2$ , y si su número de rotación  $\rho$  es irracional, entonces todas las órbitas de  $g$  son densas (ver por ejemplo [28], Theorem 12.1.1). Por lo tanto todas las órbitas pasan por el intervalo  $I$ . Teniendo en cuenta que cuando una órbita interseca el intervalo  $I$ , entonces las dos neuronas alcanzan su umbral, y el estado del sistema se resetea a  $(0, 0)$ , deducimos que todas las órbitas por el flujo  $\phi$  en el toro pasan por el punto  $(0, 0)$  en el futuro. En particular, lo hace la órbita de  $(0, 0)$ , de modo que es periódica. Concluimos que, cuando el número de rotación es irracional, entonces todas las órbitas son finalmente periódicas, ya que a partir de un determinado instante, coinciden con la órbita de  $(0, 0)$ .

Si el número de rotación  $\rho$  es racional, entonces todas las órbitas por iterados hacia el futuro de  $g$  tienen sus respectivos  $\omega$ -límite en  $g$ -órbitas periódicas (ver por ejemplo Proposición 11.2.2 en [28]). Por lo tanto todas las órbitas por el flujo  $\phi$  son atraídas por órbitas periódicas. Discutamos dos casos, cuando pasamos al flujo real no regularizado  $\psi$  en el toro:

Si los iterados por  $g$  de  $(x, 0)_{\text{mód. } k}$  no pasan por el intervalo  $I$ , entonces la  $\psi$ -órbita queda dada por la  $\phi$ -órbita. Su  $\omega$ -límite es periódico y no pasa por  $I$ .

En cambio, si algún iterado de  $(x, 0)_{\text{mód. } k}$  pasa por el intervalo  $I$ , la  $\psi$ -órbita se resetea, saltando al punto  $(0, 0)$ . Después, si ningún iterado por  $g$  de  $(0, 0)$  cae en  $I$ , estamos en el caso anterior de una órbita que no pasa por  $I$ , y por lo tanto el  $\omega$ -límite es periódico. Finalmente, si algún iterado por  $g$  de  $(0, 0)$  vuelve a caer en  $I$ , entonces la  $\psi$ -órbita de  $(0, 0)$  vuelve a  $(0, 0)$ , de modo que es periódica. En este último caso la órbita dada por el flujo  $\psi$  resulta finalmente periódica, y por lo tanto su  $\omega$ -límite es periódico.  $\square$

**Observación:** Hemos tomado desde el principio, la hipótesis de que son de clase  $C^2$  todas las funciones dadas en el modelo, que determinan la dinámica del sistema. Es decir, son de clase  $C^2$  por hipótesis las funciones  $u_1, u_2$ , componentes del campo dado que determina el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1), y son de clase  $C^2$  las funciones  $a, b$  que determinan la interacción o acople instantáneo entre las dos neuronas (hipótesis H). La única razón para exigir la condición de regularidad  $C^2$  a estas funciones, es que la tesis de densidad de las órbitas en el Teorema de Denjoy-Schwarz, que aplicamos para demostrar el Teorema 2.2.4 en el caso de número de rotación irracional, es cierta cuando el mapa de retorno de Poincaré  $g$  en el círculo es de clase  $C^2$ , pero no es necesariamente cierta si el mapa  $g$  fuera por ejemplo, solo de clase  $C^1$  (ver [28], página 403, Ejemplo de Denjoy).

## Capítulo 3

# Sincronización global de impulsos.

**Gran coalición en redes neuronales cooperativas con diferentes estructuras de grafo.**

Autores:

Marcos Barrios<sup>1</sup>, Florencia Cubría<sup>1</sup> y Pilar Lorenzo.<sup>1</sup>

Este trabajo fue realizado en el programa de introducción a la investigación de los autores bajo la orientación de Eleonora Catsigeras en el marco del proyecto “Neurodinámica”, financiado por L’Oréal-Unesco, Uruguay, 2014-2016.

*MSC 2010:* Primarias: 34C15, 92B20; Secundarias: 34D06, 05C22, 37N25

*Palabras Clave:* Redes neuronales, redes cooperativas, sincronización, osciladores acoplados, gran coalición.

---

<sup>1</sup>Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia” (IMERL), Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay. Correos electrónicos: mbarrios@cmat.edu.uy; fcubria@cmat.edu.uy; plorenzo@fing.edu.uy.

.

## **Gran coalición en redes neuronales cooperativas con diferentes estructuras de grafo.**

Marcos Barrios

Florencia Cubría

Pilar Lorenzo

### **Resumen.**

Consideramos un modelo dinámico para una red de neuronas del tipo de integración y disparo, acopladas por impulsos. En este capítulo estudiamos redes cooperativas, que son aquellas para las cuales las interacciones no nulas son todas positivas. Para diferentes estructuras del grafo asociado a la red, demostraremos la presencia recurrente de la llamada “gran coalición”: esto es, la sincronización global de eventos, o más precisamente, el disparo simultáneo de todas las neuronas de la red.

### **Introducción**

En este trabajo adoptaremos un modelo matemático de red neuronal con interacciones por impulsos instantáneos (ver por ejemplo [12], [17], [26]).

El fenómeno de gran coalición fue demostrado rigurosamente por primera vez en [31] en 1990, para redes cooperativas de grafo completo y neuronas idénticas. Fue generalizado en [2], para el caso de neuronas similares, no necesariamente idénticas. Más recientemente, en [8], se dio una demostración rigurosa de la sincronización global de eventos, para redes heterogéneas, cuando el grafo de interacciones es completo y tiene suficiente cantidad de vértices (neuronas).

El propósito de este trabajo es generalizar los resultados mencionados anteriormente. Demostraremos teoremas que dan condiciones suficientes para la presencia recurrente de gran coalición. En primer lugar, para redes con grafos asociados completos, en el Teorema 3.2.6, mejoramos la cota inferior a la cantidad de neuronas de la red que asegura gran coalición dada en [8]. A partir de la sección 4 consideraremos distintas estructuras de grafos asociados a la red que garantizan gran coalición.

### 3.1. Definición del modelo

Una red neuronal  $\mathcal{N}$  describe la dinámica de un conjunto finito de neuronas que interactúan. Denotaremos con la letra  $N$  la cantidad de neuronas, y con la letra  $i \in I = \{1, \dots, N\}$  una neurona en particular. La configuración de la red estará determinada por un vector  $X(t) = (X_1(t), \dots, X_N(t))$ , donde  $X_i(t) \in \mathbb{R}$  indica la configuración de la neurona  $i$  en el instante  $t$ . La evolución dinámica del sistema estará dada por dos tipos de comportamientos: el continuo y el de disparos (modelo ID, también conocido como IF por sus siglas en inglés). Para explicar el modelo y ambos comportamientos necesitaremos otras definiciones de constantes y funciones. Comenzaremos con un ejemplo que ilustre la situación que pretendemos modelar.

**Ejemplo 3.1.1.** Sea  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  una función  $C^1$  que además verifica

$$F_i(x) \geq 0 \text{ para todo } i,$$

$$F_j(x) \geq k > 0 \text{ para algún } j, \quad (3.1)$$

donde  $F = (F_1, \dots, F_N)$ .

Consideremos  $\varphi_{(t_0, x_0)} : I_{(t_0, x_0)} \rightarrow \mathbb{R}^N$  la (única) solución maximal de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Sean  $\theta, h \in \mathbb{R}^+$  constantes de la red, la primera de las cuales denominaremos *umbral*.

Dado  $t_0 \in \mathbb{R}$  y  $x_0 \in [-\theta, \theta]^N$ , definimos  $X$  como  $\varphi_{(t_0, x_0)}$  mientras ninguna neurona alcance su umbral, observar que  $(t_0, x_0) = (t_0, X(t_0))$  el cual denominaremos *estado inicial*. Este comportamiento será denominado *régimen continuo*. Cuando esta etapa finalice, lo cual sucede debido a (3.1), comenzará el denominado *régimen de disparos*, esto es,  $X_i$  se incrementará  $h$  por cada neurona que haya alcanzado el umbral. A su vez, éstas últimas, reiniciarán su valor en 0. Si denotamos  $\bar{t}$  al instante en el que esto sucede y  $X(\bar{t})$  a la nueva configuración, repetimos el procedimiento a partir de este nuevo estado inicial.

Formalicemos lo anterior: consideremos  $\varphi_{(t_0, x_0)}$  con  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ , definimos

$$\bar{t} = \inf\{t > t_0 : \varphi_{(t_0, x_0)_i}(t) \geq \theta \text{ para algún } i\}$$

$$X(t) = \varphi_{(t_0, x_0)}(t) \text{ para } t \in [t_0, \bar{t})$$

Sea  $J$  el conjunto de neuronas que disparan en el instante  $\bar{t}$ , el cual, además de incluir aquellas neuronas que “naturalmente” alcanzaron el umbral (es decir,  $\varphi_{(t_0, x_0)_i}(\bar{t}) = \theta$ ) incluirá aquellas neuronas que lo alcanzaron debido al incremento provocado por los disparos; es por esto que la definición del mismo será inductiva. Consideraremos los conjuntos

$$J_0 = \{i \in I : \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \varphi_{(t_0, x_0)_i}(t) = \theta\} \neq \emptyset,$$

$$J_{k+1} = \{i \in I \setminus J_k : \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \varphi_{(t_0, x_0)_i}(t) + h(\#J_k) \geq \theta\} \cup J_k.$$

Luego, como la cantidad de neuronas es finita el proceso estabiliza, es decir, existe un  $m$  tal que  $J_m = J_{m+1}$  y definimos  $J = J_m$ .

La configuración al cabo de este proceso será la siguiente

$$X(\bar{t})_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in J, \\ \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \varphi_{(t_0, x_0)_i}(t) + h(\#J) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observemos que por la continuidad de  $\varphi_{(t_0, x_0)}$  tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \varphi_{(t_0, x_0)_i}(t) = \varphi_{(t_0, x_0)_i}(\bar{t}).$$

Como consecuencia de la interacción instantánea, tenemos que una neurona que se reinicia no puede recibir estímulo en el mismo instante. Esto responde al “fenómeno refractario” descrito en [cita].

Observemos que  $(\bar{t}, X(\bar{t}))$  es un nuevo estado inicial, con  $X_i(\bar{t}) < \theta$  para todo  $i$ , a partir del cual se retoma el régimen continuo. Para las futuras construcciones nos será útil definir la sucesión de tiempos de los regímenes de disparo: le llamaremos  $t_k$  al tiempo donde se produce el  $k$ -ésimo disparo. La definiremos formalmente más adelante, ya que requiere definiciones previas.

Veamos dos ejemplos básicos de las definiciones anteriores: en el primer ejemplo veremos una red que posee una única neurona mientras que en el segundo consideraremos dos neuronas interactuando.

**Ejemplo 3.1.2.** Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal como en el Ejemplo 3.1.1, con  $N = 1$  (ver Figura 3.1).

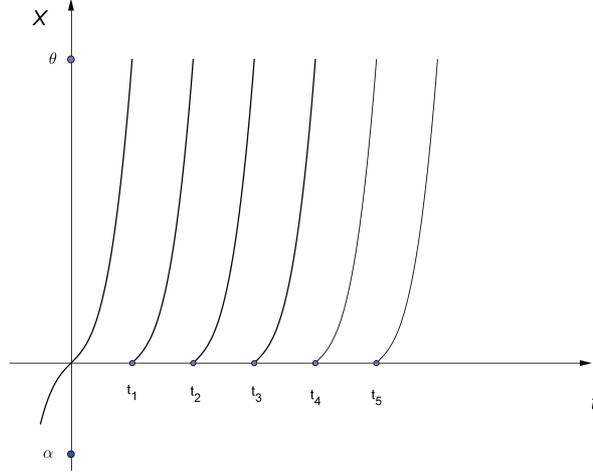


Figura 3.1: Dinámica de una neurona. Ejemplo 3.1.2.

$$F(x) = \frac{\pi}{5}(x^2 + 1), \quad \theta = \tan\left(\frac{2\pi}{5}\right) \quad \text{y} \quad \alpha = -1,5.$$

Tenemos que

$$\varphi_{(t_0, x_0)}(t) = \tan\left(\frac{\pi}{5}(t - t_0)\right) + x_0$$

es la solución de la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{x} = F(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Si consideramos el estado inicial  $\omega = (t_0, X(t_0)) = \left(-1, \tan\left(-\pi/5\right)\right)$ , se tiene que

$$\bar{t} = t_1 = 3.$$

Para el segundo disparo se tiene que  $t_2 = t_1 + 2$  y por inducción,

$$t_k = 3 + 2(k - 1) \quad \text{para todo } k > 1.$$

A partir del primer disparo la dinámica de la neurona es periódica, esto es

$$X(t + 2) = X(t) \quad \text{para todo } t \geq 3.$$

El siguiente paso es entender cómo interactúan las neuronas, para ello veamos el siguiente ejemplo:

**Ejemplo 3.1.3.** Sea  $\mathcal{N}$  como en el Ejemplo 3.1.1 con  $N = 2$  (ver Figura 3.2).

$$F(x, y) = (4, 3), \quad h_{1,2} = h_{2,1} = 12, \quad \theta = 36 \quad \text{y} \quad \alpha = 0.$$

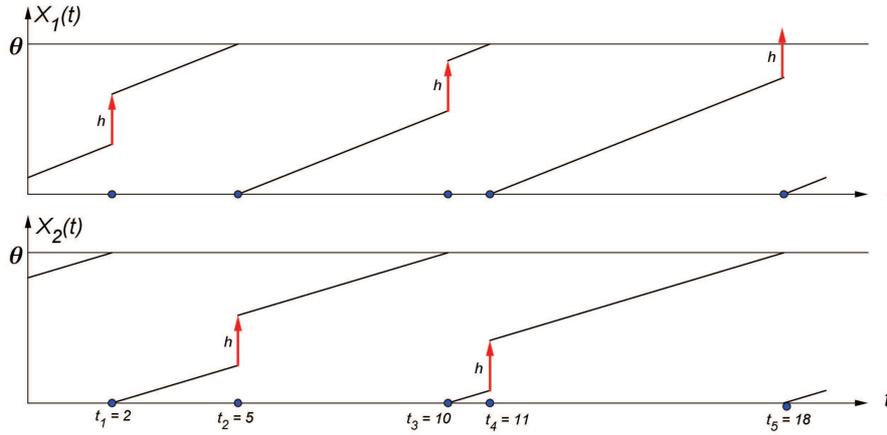


Figura 3.2: Dinámica de dos neuronas. Ejemplo 3.1.3.

En este caso la solución de la ecuación diferencial es

$$\varphi_{(t_0, x_0, y_0)}(t) = (4(t - t_0) + x_0, 3(t - t_0) + y_0).$$

Tomemos como estado inicial  $\omega = (t_0, X_1(t_0), X_2(t_0)) = (0, 4, 30)$ . En este caso, es fácil verificar que los tiempos de disparos son los siguientes:

- $t_1 = 2, X_1(t_1) = 24, X_2(t_1) = 0,$
- $t_2 = 5, X_1(t_2) = 0, X_2(t_2) = 21,$
- $t_3 = 10, X_1(t_3) = 32, X_2(t_3) = 0,$
- $t_4 = 11, X_1(t_4) = 0, X_2(t_4) = 15,$
- $t_5 = 18, X_1(t_5) = 0, X_2(t_5) = 0.$

Observamos que, si bien en el quinto disparo se tiene que  $\lim_{t \rightarrow t_5^-} X_1(t) = 28 < \theta$ , la interacción con la neurona dos provoca un disparo de la neurona 1 en ese instante.

**Definición 3.1.4. (Condiciones y parámetros de la red)** Generalizaremos las definiciones del Ejemplo 3.1.1, para ello debemos introducir algunos parámetros:

- Las constantes de la red  $\alpha_i$  y  $\theta_i$  para cada neurona de la red, que cumplen

$$\alpha_i < 0 < \theta_i \text{ con } i \in I$$

son cotas inferior y superior respectivamente de la configuración de la  $i$ -ésima neurona, es decir,

$$\alpha_i \leq X_i(t) \leq \theta_i \quad \forall t.$$

Nos referiremos a  $\theta_i$  como *umbral* de la neurona  $i$ .

- Las constantes  $h_{i,j}$  con  $i, j \in I$ ,  $i \neq j$ , indican la interacción entre las neuronas  $i$  y  $j$ .

Diremos que la red es *cooperativa* si  $h_{i,j} \geq 0$ ,  $\forall i, j$ .

- Las anteriores constantes pueden depender a su vez del tiempo en cuyo caso debemos considerar en lugar de constantes, funciones

$$\alpha_i : \mathbb{R} \rightarrow [\alpha, 0) \quad \theta_i : \mathbb{R} \rightarrow (0, \theta] \quad h_{i,j} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

que pediremos sean continuas.

- Una red tendrá asociada dos valores  $\alpha$  y  $\theta$ , que cumplan la siguiente desigualdad

$$\alpha \leq \alpha_i < 0 < \theta_i \leq \theta.$$

Consideraremos un tercer parámetro  $h \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$|h_{i,j}| \geq h \quad \forall i, j \text{ tal que } h_{i,j} \neq 0$$

y notaremos  $n$  al menor entero tal que  $nh \geq \theta$ .

- Sea  $(t_0, x_0) \in \Omega$  donde  $\Omega = \{(t, x_1, \dots, x_N) : t \in \mathbb{R}, \alpha_i(t) \leq x_i < \theta_i(t)\}$  es el conjunto de los posibles estados iniciales de la red.

Las funciones  $\hat{X}_{i(t_0, x_0)} : I_{(t_0, x_0)} \rightarrow \mathbb{R}$  serán las que determinen el régimen continuo de  $X$ . Los únicos requisitos para estas funciones serán la continuidad y el crecimiento estricto respecto de  $t$ .

Exigiremos además que para todo  $(t_0, x_0) \in \Omega$  exista  $T > t_0$  tal que

$$\widehat{X}_{i(t_0, x_0)}(T) \geq \theta_i(T) \text{ para algún } i, \quad (3.2)$$

es decir, que alguna neurona alcance su umbral en tiempo finito.

**Comentario 3.1.5.** El Ejemplo 3.1.1 verifica las condiciones de la definición 3.1.4.

**Definición 3.1.6. Régimen continuo.** El *régimen continuo* ocurre mientras ninguna neurona alcance su umbral; se encuentra dado por las funciones  $\widehat{X}_{i(t_0, x_0)}$  donde  $(t_0, x_0) \in \Omega$  es un estado inicial. Definimos

$$\bar{t} = \inf\{t > t_0 : \widehat{X}_{i(t_0, x_0)}(t) \geq \theta_i(t) \text{ para algún } i\}, \quad (3.3)$$

el cual existe por (3.2). Se tiene que  $X_i(t) = \widehat{X}_{i(t_0, x_0)}(t)$ ,  $\forall t \in [t_0, \bar{t})$  y en el instante  $\bar{t}$  la red neuronal entra en el denominado *régimen de disparos*, que detallamos a continuación.

**Definición 3.1.7. Régimen de disparos.** Éste ocurre cuando una o varias neuronas llegan a su umbral provocando una discontinuidad en el estado de la red. Para  $\bar{t}$  como en (3.3), tenemos que

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \widehat{X}_i(t) \leq \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \theta_i(t) \quad \text{para todo } i \in I$$

$$\lim_{t \rightarrow \bar{t}} \widehat{X}_j(t) = \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} \theta_j(t) \quad \text{para algún } j \in I$$

y por ser  $\widehat{X}_i$  y  $\theta_i$  continuas podemos reescribir las afirmaciones anteriores como

$$\forall i \in I \quad \widehat{X}_i(\bar{t}) \leq \theta_i(\bar{t}),$$

$$\exists j \in I \quad \widehat{X}_j(\bar{t}) = \theta_j(\bar{t}).$$

Definamos inductivamente  $J \subset I$  el conjunto de neuronas que disparan en el instante  $\bar{t}$  como en el Ejemplo 3.1.1

$$J_0 = \{i \in I : \widehat{X}_i(\bar{t}) = \theta_i(\bar{t})\},$$

$$J_{k+1} = \{i \in I \setminus J_k : \widehat{X}_i(\bar{t}) + \sum_{j \in J_k} \max\{h_{j,i}(\bar{t}), 0\} \geq \theta_i\} \cup J_k.$$

Observar que  $J_0 \neq \emptyset$  por la condición 3.2.

Por ser  $I$  finito, existe un  $m$  tal que  $J_m = J_{m+1}$ , y definimos  $J = J_m$ .

Definimos la configuración en  $\bar{t}$  como

$$X_i(\bar{t}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in J, \\ \widehat{X}_i(\bar{t}) + \sum_{j \in J} h_{j,i}(\bar{t}) & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.4)$$

El estado  $(\bar{t}, X(\bar{t}))$  es un nuevo estado inicial que entra en el régimen continuo, notemos que el próximo régimen de disparo no es inmediato. Observemos que  $\bar{t}$  depende del estado inicial  $\omega = (t_0, X(t_0))$ , razón por la cual escribiremos  $\bar{t}(\omega)$ .

**Comentario 3.1.8.** La razón de considerar  $\max\{h_{j,i}(\bar{t}), 0\}$  y no simplemente  $h_{j,i}(\bar{t})$  viene dada por el principio de Dale [41]. De todas formas, los resultados de este capítulo trabajarán con  $h_{i,j} \geq 0$ .

Para entender la dinámica de una red particular a partir de un estado inicial estudiaremos la dinámica de los instantes de disparos, es decir, el comportamiento de la red en aquellos instantes en los que alguna neurona alcanza su umbral.

**Definición 3.1.9. Mapa Retorno.** Denominaremos *mapa retorno* al mapa  $\rho : \Omega \rightarrow \Omega$  dado por

$$\rho(\omega) = (\bar{t}(\omega), X(\bar{t}(\omega))).$$

La aplicación del mapa  $\rho$  será denominada *disparo*, notar que este nombre tiene sentido dado que  $\rho(\omega)$  es el estado de  $\omega$  luego de entrar en el régimen de disparos.

Formalicemos ahora la definición de  $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ :

**Definición 3.1.10.** Le llamaremos  $t_k$  a el tiempo del  $k$ -ésimo disparo. Esto es,

$$t_k = \bar{t}(\rho^{k-1}(\omega)).$$

Notemos que la dinámica de un estado inicial  $\omega_0 = (t_0, X(t_0))$  queda determinada por la sucesión  $\omega_n = \rho^n(\omega)$ .

Veamos dos definiciones de dinámicas particulares:

**Definición 3.1.11.** Decimos que el estado inicial  $\omega$  alcanza una *gran coalición* si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $J((\rho^n(\omega))) = I$ , es decir, si en algún iterado del régimen de disparos, todas las neuronas disparan simultáneamente.

En el Ejemplo 3.1.3 tenemos que se alcanza una gran coalición en el quinto instante de disparo.

**Definición 3.1.12.** Decimos que el estado inicial es *finalmente periódico* si existen  $T_0 > t_0$  y  $S > 0$  tal que  $X(t) = X(t + S)$ ,  $\forall t > T_0$ , es decir,  $X$  es  $S$  periódica a partir del instante  $T_0$ .

**Comentario 3.1.13.** Si todos los parámetros de la red son independientes del tiempo, y un estado inicial  $\omega = (t_0, X(t_0))$  cumple que existen  $k$  y  $l$  tal que  $X(t_{k+l}) = X(t_k)$ , entonces  $\omega$  es finalmente periódico.

**Grafos.** En este capítulo consideraremos únicamente interacciones sinápticas positivas, es decir,  $h_{i,j} \geq 0$  para toda pareja  $(i, j)$ . Haremos un estudio combinatorio de las posibles dinámicas de una red neuronal a partir de lo que llamaremos *grafo asociado* a la red. Recordemos antes la siguiente definición:

**Definición 3.1.14.** Un *grafo*  $G$  es un par  $(V, E)$  donde  $V$  es un conjunto finito no vacío cualquiera y  $E \subset V \times V$ . Los elementos de  $V$  se denominan *vértices* y los de  $E$  *aristas*.

Las aristas de la forma  $(x, x)$  se denominan *lazos*. Llamaremos *grado* del grafo a  $gr(G) = \#V$ .

Existe una representación gráfica natural de los grafos en la cual los vértices se representan como puntos y las aristas  $(x, y)$  como segmentos dirigidos o flechas de  $x$  a  $y$ . Si  $(x, y)$  e  $(y, x)$  integran las aristas del grafo, podemos representar ambas aristas con un segmento, en lugar de dos segmentos dirigidos.

**Ejemplo 3.1.15.** El grafo  $G = (V, E)$ , donde

$$V = \{1, 2, 3, 4\} \text{ y } E = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (4, 3)\},$$

puede representarse de alguna de las dos formas de la Figura 3.3.

Trabajaremos con grafos sin lazos. Un grafo particular que será utilizado en la próxima sección es el siguiente:

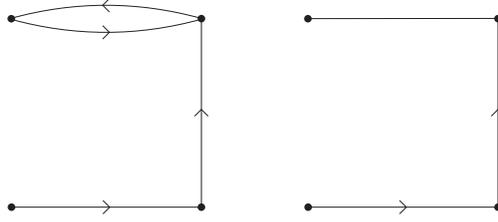


Figura 3.3: Representación gráfica del grafo del Ejemplo 3.1.15.

**Definición 3.1.16.** El grafo  $K_N = (V, E)$  donde  $V = \{1, \dots, N\}$  y  $E = \{(i, j) \in V \times V : i \neq j\}$  se denomina *grafo completo de  $N$  vértices*. (Ver Figura 3.4.)

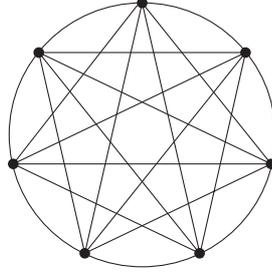


Figura 3.4: El grafo  $K_7$ .

Para estudiar la dinámica de una red neuronal, estudiaremos el grafo asociado a ella:

**Definición 3.1.17.** El *grafo asociado* a una red neuronal  $\mathcal{N}$  es un grafo  $G(\mathcal{N})$  cuyos vértices son neuronas y cuyas aristas son aquellos pares de neuronas  $(i, j)$  que verifican que  $h_{i,j} > 0$ . Cuando no haya ambigüedad notaremos simplemente  $G$ . Observar que  $I = V$  y por tanto  $\text{gr}(G) := \#V = \#I = N$ .

### 3.2. Estudio de $K_N$

En esta sección estudiaremos redes cooperativas cuyo grafo asociado es el completo  $K_N$ . Probaremos que en este caso, podemos suponer que el estado inicial  $X(t_0)$  cumple que  $X_i(t_0) \geq 0$  para todo  $i \in I$ .

A continuación estableceremos condiciones suficientes para garantizar una gran coalición en la red y veremos qué ocurre si debilitamos estas condiciones. Comenzaremos con la prueba de algunos resultados que serán utilizados a lo largo de la sección. Introduzcamos antes algo de notación:

Llamaremos  $a_k$  a la cantidad de neuronas que dispara en el instante  $t_k$ , es decir,

$$a_k = \#J(\rho^{k-1}(\omega)).$$

En particular, como  $J(\rho^{k-1}(\omega)) \neq \emptyset$ , se tiene que  $a_k \geq 1$ .

El parámetro  $n$  asociado a la red de neuronas, definido en 3.1.4 será un valor crítico a lo largo de todo este artículo. Observamos que  $n$  puede escribirse como

$$n := \left\lceil \frac{\theta}{h} \right\rceil. \quad (3.5)$$

**Lema 3.2.1.** *Para  $i \notin J(w)$  se tiene que  $X_i(\bar{t}) \geq X_i(t_0) + (\#J(\omega))h$ .*

*Demostración.* Evidente a partir de (3.4) y la monotonía de  $\widehat{X}_i$ .  $\square$

**Corolario 3.2.2.** *Si  $i \notin \bigcup_{k=0}^l J(\rho^k(w))$  entonces  $X_i(t_{l+1}) \geq h \sum_{k=1}^{l+1} a_k$ .*

*Demostración.* Aplicando inducción completa en  $l$  y utilizando el Lema 3.2.1 se obtiene la tesis.  $\square$

**Comentario 3.2.3.** A partir de lo anterior se deduce que no se pierde generalidad al pedir  $X_i(t_0) \geq 0$  para todo  $i \in I$ . En lo que sigue, solo consideraremos los estados iniciales de esa forma.

**Corolario 3.2.4.** *Si  $\#J(\omega) \geq n$  se tiene que  $J(\omega) = I$ .*

*Demostración.* Supongamos que existe  $i \notin J(\omega)$ , luego, por el Lema 3.2.1 tenemos que

$$X_i(\bar{t}) \geq (\#J(\omega))h \geq nh \geq \theta \geq \theta_i,$$

lo cual es absurdo.  $\square$

**Corolario 3.2.5.** *Si  $i \notin \bigcup_{k=0}^{l-1} J(\rho^k(w))$  y  $\sum_{k=1}^{l+1} a_k \geq n$  entonces  $i \in J(\rho^l(\omega))$ .*

*Demostración.* Supongamos que  $i \notin J(\rho^l(\omega))$ , luego,  $i \notin \bigcup_{k=0}^l J(\rho^k(\omega))$ , luego, por el Corolario 3.2.2 tenemos que

$$X_i(t_{l+1}) \geq h \sum_{k=1}^{l+1} a_k \geq hn > \theta \geq \theta_i,$$

lo que es un absurdo. Luego  $i \in J(\rho^l(\omega))$ .  $\square$

En el siguiente Teorema estableceremos una condición suficiente en función de  $\theta$  y  $h$ , referida al tamaño de la red, para obtener gran coalición.

**Teorema 3.2.6. (“Large Cooperativity Principle”)** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado completo  $K_N$ , y sea  $n$  tal que  $nh \geq \theta$ . Si  $N \geq 2n - 1$  entonces cualquier estado inicial  $\omega$  alcanza una gran coalición y lo hace en menos de  $n$  disparos.*

*Demostración.* Sea  $\omega$  un estado inicial cualquiera. Denotaremos  $I_l(\omega)$ , o simplemente  $I_l$ , al conjunto de neuronas que dispararon al menos una vez hasta producirse el  $l$ -ésimo disparo:

$$I_l = \bigcup_{k=0}^{l-1} J(\rho^k(\omega)).$$

Sea  $m$  tal que

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k < n \quad \text{y} \quad \sum_{k=1}^m a_k \geq n.$$

Como  $a_k \geq 1$  por ser los conjuntos  $J(\rho^k(\omega))$  no vacíos, existe tal  $m$  y además se tiene que  $m \leq n$ .

Para el caso  $m = 1$ , por el Corolario 3.2.4, se tiene que  $J(\omega) = I$ . Es decir, la red alcanzó gran coalición en el primer disparo.

Para el caso  $m > 1$ , tenemos que

$$\#I_{m-1} \leq \sum_{k=0}^{m-2} \#J(\rho^k(\omega)) = \sum_{k=1}^{m-1} a_k < n,$$

luego,

$$\#(I_{m-1})^c > N - n \geq 2n - 1 - n = n - 1,$$

por tanto,

$$\#(I_{m-1})^c \geq n,$$

en particular, resulta no vacío. Por el Corolario 3.2.5 tenemos que si una neurona no disparó hasta el instante de disparo  $m - 1$ , disparará en el instante  $m$ , es decir,  $J(\rho^m(\omega)) \supset (I_{m-1})^c$ . Dado que  $\#(I_{m-1})^c \geq n$ , se tiene que  $a_m \geq n$  y por el Corolario 3.2.4 que  $J(\rho^m(\omega)) = I$ . Hemos probado que en el instante de disparo  $m$  la red alcanza gran coalición. Como además  $m \leq n$ , se concluye la tesis.  $\square$

Veamos ahora que la condición  $N \geq 2n - 1$  del Teorema 3.2.6 es óptima. La forma más simple de construir un estado inicial que no alcance gran coalición es darle una dinámica periódica al mapa de retorno que evite la configuración nula.

**Proposición 3.2.7.** *Existe una red neuronal cooperativa cuyo grafo asociado es  $K_N$  con  $N = 2n - 2$ , que para cierto estado inicial  $\omega$  no alcanza gran coalición.*

*Demostración.* Sea  $\mathcal{N}$  una red de tamaño  $N = 2n - 2$  donde  $\theta_i = \theta$  para todo  $i$ ,  $h_{i,j} = h$  para todo  $i, j$  y cuyas funciones  $\widehat{X}_i$  se definen a continuación.

Sea  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  que cumple que  $G(x) \geq k > 0$ . Consideremos  $\widehat{X}$  como en el Ejemplo 3.1.1 con  $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$  tal que

$$F_i(x_1, \dots, x_N) = G(x_i).$$

Sea  $\varphi_{(t_0, a)}(t)$  la solución maximal de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = G(x), \quad x(t_0) = a.$$

Observar que  $\widehat{X}_{i(t_0, x_0)}(t) = \varphi_{(t_0, x_0)}(t)$ . Notamos  $\psi(t, a) = \varphi_{(0, a)}(t)$ . Definimos la función auxiliar

$$K(t) = \psi(t, \psi(t, 0) + h(n - 1)).$$

Notemos que  $K(t)$  es continua por ser composición de funciones continuas. Intuitivamente, podemos pensar que  $K(t)$  representa la dinámica siguiente: nos movemos durante tiempo  $t$  vía  $\psi$ , luego sumamos  $h(n - 1)$ , desde donde nos movemos nuevamente durante tiempo  $t$  vía  $\psi$ .

Dado que:

- $K(0) = h(n - 1) < \theta$ ,

- $\psi$  es creciente,
- $K(t) \geq \psi(t, 0)$  para todo  $t$ ,
- existe  $S > 0$ , tal que  $\psi(S, 0) \geq \theta$ ,

el Teorema de valor medio asegura que existe  $T > 0$  tal que  $K(T) = \theta$ . Separemos las neuronas en dos grupos, cada uno de ellos con  $n - 1$  neuronas. Consideremos el siguiente estado inicial  $\omega = (0, X(0))$  donde

$$X_i(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n - 1, \\ \psi(T, 0) + h(n - 1) & \text{si } i > n - 1. \end{cases}$$

O sea, en tiempo  $t = 0$  el primer grupo de neuronas se configura en cero, mientras que el segundo lo hace en el punto al que se llega iniciando en 0, moviéndose durante tiempo  $T$  vía  $\psi$  y sumando  $h(n - 1)$ , como en la figura 3.5.

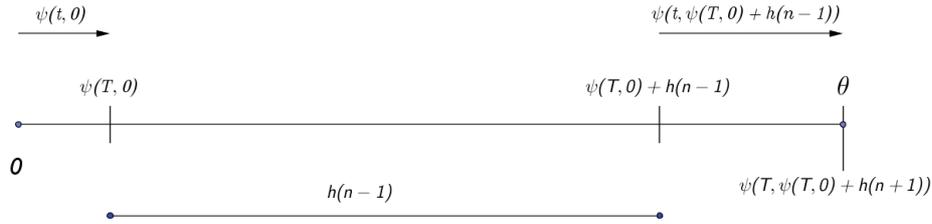


Figura 3.5: Representación gráfica de la dinámica de  $K$ .

Veamos que  $\bar{t}(\omega) = T$ , el tiempo en el que el segundo grupo de neuronas dispara. Esto se debe a que para todo  $i > n - 1$  tenemos

$$\widehat{X}_i(T) = \psi(T, X_i(0)) = \psi(T, \psi(T, 0) + h(n - 1)) = K(T) = \theta, \quad \text{y}$$

$$\widehat{X}_j(t) \leq \widehat{X}_n(t) \text{ para todo } j.$$

Veamos que en el instante  $T$  no dispara ninguna neurona del primer grupo: si  $i \leq n - 1$  entonces

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \widehat{X}_i(t) + h(n - 1) = \psi(T, 0) + h(n - 1) < \theta,$$

por lo que los únicos disparos en tiempo  $T$  son espontáneos, es decir, la cooperación entre neuronas no produce ningún disparo extra. Luego,

$$X_i(T) = \begin{cases} \psi(T, 0) + h(n-1) & \text{si } i \leq n-1, \\ 0 & \text{si } i > n-1. \end{cases}$$

De forma análoga se tiene que

$$X_i(2T) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n-1, \\ \psi(T, 0) + h(n-1) & \text{si } i > n-1, \end{cases}$$

de donde se deduce que nunca se alcanza gran coalición.  $\square$

Podemos aplicar la misma idea para grupos más pequeños de neuronas si  $N$  es aún menor.

A modo de ejemplo, si la red es de tamaño  $n$ , podemos considerar  $n$  grupos de neuronas (cada uno de ellos con una neurona) con una distribución análoga a la anterior, y obtener un estado que no alcanza gran coalición, como en la figura 3.6.

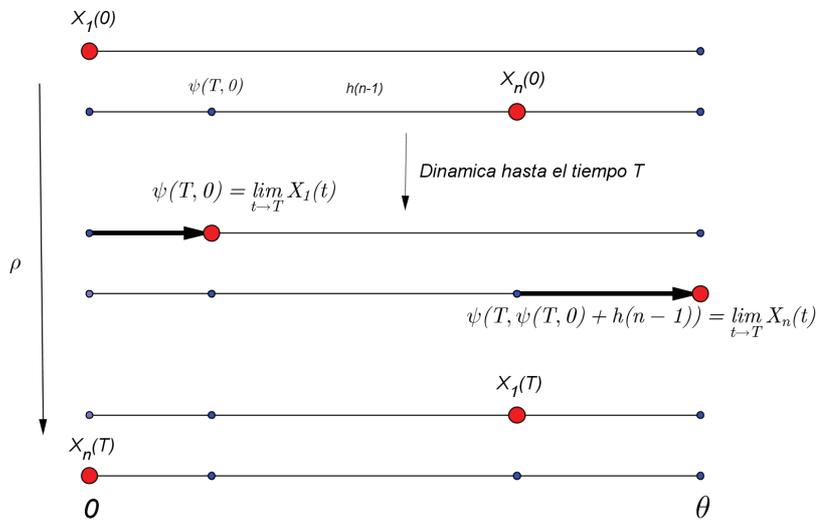


Figura 3.6: Representación gráfica del mapa de retorno.

**Proposición 3.2.8.** Sean  $\mathcal{N}$  una red neuronal de tamaño  $2n - 2$  con grafo asociado completo y  $\omega$  una configuración arbitraria. Entonces, o bien  $\omega$  alcanza infinitas veces gran coalición; o bien existe  $A \subset I$  con  $\#A = n - 1$  y  $K \geq 0$  tal que

$$J(\rho^{2l}(\omega)) = A^c \quad \text{y} \quad J(\rho^{2l+1}(\omega)) = A$$

para todo  $l$  con  $2l \geq K$ .

*Demostración.* Sea  $\omega$  un estado inicial que alcanza gran coalición solo finitas veces. Existe entonces  $K$  de modo que  $\rho^K(\omega)$  no alcanza gran coalición. Sea  $\omega' = \rho^K(\omega)$ . A partir de ahora trabajaremos con  $\omega'$ .

Sean  $I_k$ ,  $a_k$  y  $m$  como en 3.2.6. Recordemos que  $m$  cumple que si una neurona no disparó hasta el instante de disparo  $m - 1$ , disparará en el instante  $m$ . Como  $\omega'$  no alcanza gran coalición,  $m > 1$ . Tenemos que  $\#(I_{m-1})^c \leq n - 1$ . Como además

$$\#(I_{m-1})^c = N - \#(I_{m-1}) \geq 2n - 2 - \sum_{k=1}^{m-1} a_k \geq n - 1,$$

tenemos que

$$\#(I_{m-1})^c = n - 1, \quad \#I_{m-1} = n - 1.$$

En particular, como  $\#I_{m-1} = \sum_{k=1}^{m-1} a_k = n - 1$ , se tiene que los conjuntos  $J(\rho^k(\omega'))$  son disjuntos para todo  $k \leq m - 1$ . Esto implica que ninguna neurona disparó más de una vez hasta ese momento.

Veamos que  $m = 2$ . Supongamos por absurdo que  $m > 2$  y consideremos  $j \in I_1 = J(\omega)$ . Se tiene que

$$X_j(t_{m-1}) \geq a_{m-1}h \geq h.$$

Entonces, en el disparo siguiente, tenemos que  $X_j(t_m) \geq h + h(\#I_{m-1}) = h + h(n - 1) = n$ . La neurona dispara en el instante  $m$ , llegando a un absurdo.

Notamos  $A = I_1$ . Tenemos que  $J(\omega') = A^c$  y  $J(\rho(\omega)) = A$ . Tomando ahora  $\rho(\omega)$  como estado inicial, llegamos a que  $J(\rho(\omega')) = A$  y  $J(\rho^2(\omega')) = A^c$ . Inductivamente concluimos que  $J(\rho^{2l}(\omega)) = A^c$  y  $J(\rho^{2l+1}(\omega)) = A$  si  $2l \geq K$ .

□

### 3.3. Estudio de redes a partir de su grafo asociado

En esta sección realizaremos un estudio de propiedades básicas de algunas redes neuronales, a partir de su grafo asociado. Veamos primero algunas definiciones referidas a grafos:

**Definición 3.3.1.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo. Un *camino dirigido* o simplemente *camino* del vértice  $x$  al vértice  $y$  con  $x \neq y$ , es una secuencia finita de vértices  $c = x_0 \dots x_k$  tal que  $x_0 = x$ ,  $x_k = y$  y  $(x_i, x_{i+1}) \in E$  para todo  $i \in \{0, \dots, k - 1\}$ . Decimos que  $k$  es el *largo del camino* y notamos  $long(c) = k$ .

En la Figura 3.7 se muestra un ejemplo de camino de largo 3. Observar que esta definición permite que tanto las aristas como los vértices se repitan en un camino.

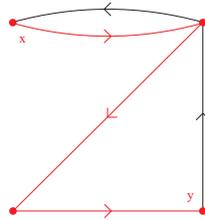


Figura 3.7: Camino de largo 3 de  $x$  a  $y$ .

**Definición 3.3.2. (Grafo fuertemente conexo)** Decimos que un grafo  $G = (V, E)$  es *fuertemente conexo* si dados dos vértices  $x$  e  $y$ , con  $x \neq y$ , existe un camino orientado desde  $x$  a  $y$ . En la Figura 3.8 se muestran dos grafos, uno fuertemente conexo y otro que no lo es. Observamos que el grafo  $K_N$  es fuertemente conexo.

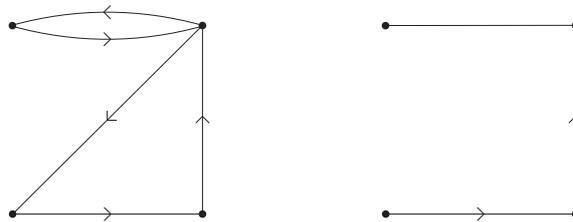


Figura 3.8: A la izquierda, un grafo fuertemente conexo, y a la derecha, un grafo no fuertemente conexo.

En un grafo fuertemente conexo podemos definir la *distancia* entre dos puntos:

**Definición 3.3.3.** Sea  $G = (V, E)$  un grafo fuertemente conexo y dos vértices distintos  $x$  e  $y$ . Decimos que la *distancia* (direccionada) de  $x$  a  $y$  es

$$d_G(x, y) = \text{mín}\{\text{long}(c) : c \text{ camino dirigido de } x \text{ a } y\}$$

**Comentario 3.3.4.** Notar que la definición de distancia no es simétrica, es decir  $d_G(x, y)$  puede ser distinta a  $d_G(y, x)$  (Ver Figura 3.9.) La restricción de que el grafo sea fuertemente conexo en la definición 3.3.3, es para garantizar que exista algún camino entre  $x$  e  $y$ .

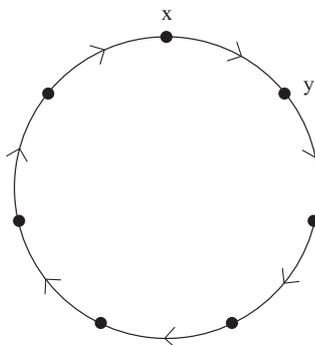


Figura 3.9: La distancia (direccionada) de  $x$  a  $y$  es 1, pero la de  $y$  a  $x$  es 6.

Veamos a continuación que si una red neuronal tiene un grafo asociado fuertemente conexo, todas las neuronas finalmente disparan, de hecho, infinitas veces:

**Proposición 3.3.5.** Sea una red neuronal  $\mathcal{N}$  con grafo asociado  $G = (V, E)$  fuertemente conexo. Consideramos  $x$  e  $y$  vértices distintos con  $d_G(x, y) = d$  y un estado inicial  $\omega$ . Definimos

$$a_k(z) = \#[J(\rho^{k-1}(\omega)) \cap \{z\}].$$

$$\text{Si } \sum_{k=1}^l a_k(x) \geq \left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^d, \text{ entonces } \sum_{k=1}^l a_k(y) \geq 1.$$

La proposición puede entenderse de la siguiente manera: si una neurona  $x$  está conectada a otra neurona  $y$  mediante un camino de largo  $d$ , y la

neurona  $x$  dispara una suficiente cantidad de veces, la neurona  $y$  disparará también.

*Demostración.*

Consideremos primero el caso en que  $d_G(x, y) = 1$ . La configuración de la neurona  $y$  en el instante de disparo  $k$  es la siguiente:

$$X_y(t_l) = X_y(0) + \sum_{k=1}^l \sum_{z \in J(\rho^{k-1}(\omega))} h_{(z,y)}(t_l) \geq X_y(0) + h \sum_{k=1}^l a_k(x) \geq \alpha + \left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil h = \theta,$$

con lo que la neurona  $y$  dispara en el instante de disparo  $l$ .

Hemos probado que por cada  $\left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil$  disparos de  $x$ , cualquier neurona que se encuentre a distancia 1 disparará al menos una vez. Por lo tanto, si  $x$  dispara al menos  $\left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^2$  veces, cualquier neurona a distancia dos de ella disparará al menos una vez.

Consideramos ahora el caso general. Tomamos un camino  $x = x_0 \cdot x_1 \cdot \dots \cdot x_d = y$  de longitud mínima entre  $x$  e  $y$ . Como  $x$  dispara al menos  $\left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^d$  veces en  $l$  iterados del mapa de retorno, tenemos que  $x_1$  dispara al menos  $\left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^{d-1}$  veces. Inductivamente se llega a que  $x_i$  dispara al menos  $\left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^{d-i}$  veces. En particular  $x_d = y$  dispara al menos una vez en los  $l$  iterados del mapa de retorno, como queríamos demostrar.  $\square$

**Corolario 3.3.6.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal cooperativa cuyo grafo asociado  $G$  es fuertemente conexo y  $\#I = N$ . Entonces para cualquier estado inicial  $\omega$ , tenemos que todas las neuronas dispararon al menos una vez en  $N \left\lceil \left( \frac{\theta - \alpha}{h} \right) \right\rceil^{N-1}$  regímenes de disparos.*

*Demostración.* Se deduce a partir de la proposición anterior, notando que  $d \leq N - 1$  y aplicando el principio del palomar.  $\square$

Otro tipo de grafos que estudiaremos son aquellos que tienen *forma de estrella*.

**Definición 3.3.7.** Decimos que un grafo  $G = (V, E)$  tiene *forma de estrella* si existe un vértice origen, que notamos  $x_G$ , tal que para todo vértice  $y \neq x_G$  existe un camino orientado de  $x_G$  a  $y$ .

No tiene por qué haber un único vértice que cumpla la función de  $x_G$ . En particular, si un grafo  $G$  es fuertemente conexo entonces tiene forma de estrella y cualquier vértice  $i$  puede cumplir el rol de  $x_G$ . Notar que las definiciones 3.3.2 y 3.3.7 no son equivalentes:

**Ejemplo 3.3.8.** Sea  $G = (V, E)$  el grafo definido por:

- $V = \{1, \dots, N\}$
- $(i, j) \in E$  si solo si  $i + 1 = j$

Este grafo se denota  $P_N$  y posee la representación gráfica de la Figura 3.10. El grafo  $P_N$  tiene forma de estrella tomando el origen como  $1 = x_G$ . Sin embargo no es fuertemente conexo pues, por ejemplo, no existe ningún camino de  $N$  a 1.



Figura 3.10: El grafo  $P_N$ .

Estudiaremos ahora algunos resultados simples para redes neuronales cuyos parámetros cumplan  $h \geq \theta$ .

### 3.3.1. Redes neuronales con $h \geq \theta$

Estos ejemplos singulares serán la base para las construcciones de la próxima sección, donde obtendremos nuevas redes neuronales con gran coalición. El fundamento principal de esta sección es el siguiente:

**Comentario 3.3.9.** Si  $h \geq \theta$ , entonces para toda configuración inicial no negativa, es decir  $X_i(t_0) \geq 0$  para todo  $i \in I$ , el disparo de una neurona  $x$  cualquiera determina el disparo simultáneo de todas las neuronas adyacentes a ella.

**Proposición 3.3.10.** Si  $h \geq \theta$ , dado un camino dirigido desde  $x$ , se tiene que cuando  $x$  dispara, disparan todas las neuronas del camino simultáneamente.

*Demostración.* Dado un camino comenzando en  $x$ , por ser  $h \geq \theta$ , la siguiente neurona del camino disparará también en el mismo instante de disparo. Inductivamente, se llega a que todas las neuronas del camino disparan en el mismo instante de disparo que  $x$ .  $\square$

**Corolario 3.3.11.** *Sea  $\mathcal{N}$  red neuronal cuyo grafo asociado  $G$  es fuertemente conexo. Si  $h \geq \theta$ , entonces hay gran coalición en cada régimen de disparo.*

*Demostración.* Sea  $x \in J(\omega)$ . Tomemos  $y \neq x$ . Como el grafo es fuertemente conexo, sabemos que existe un camino desde  $x$  hasta  $y$ . Por la Proposición 3.3.10, tenemos que al disparar  $x$ , todas las neuronas del camino disparan en ese régimen de disparo. Osea,  $y \in J(\omega)$ , con lo que se llega a que  $J(\omega) = I$ . En particular, se llega a que en todo régimen de disparo hay gran coalición.  $\square$

También realizaremos construcciones a partir de grafos con forma de estrella, para lo cual necesitaremos la siguiente proposición:

**Proposición 3.3.12.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal cuyo grafo asociado  $G = (V, E)$  tiene forma de estrella con centro  $x_G$ . Si  $h \geq \theta$  entonces, dado un estado inicial  $\omega$  donde  $X_i(0) \geq 0$  para todo  $i$ , se tiene que  $J(\omega) = I$  si solo si  $x_G \in J(\omega)$ .*

*Demostración.* Para el directo, basta notar que si  $J(\omega) = I$ , entonces en particular se tiene que  $x_G \in I = J(\omega)$ . Veamos ahora el recíproco. Tomemos  $y \neq x_G$ . Sabemos que existe un camino dirigido de  $x_G$  a  $y$ . De forma análoga a la demostración de 3.3.11 se tiene que  $y \in J(\omega)$ . Por ser  $y$  arbitrario, se concluye el recíproco.  $\square$

### 3.4. Construcción de redes con gran coalición

En esta sección construiremos modelos de redes neuronales cooperativas con gran coalición para cualquier estado inicial. Pediremos que la configuración inicial  $X(0)$  sea no negativa. Notar que si el grafo asociado a la red es fuertemente conexo, en virtud del Corolario 3.3.6, la condición anterior no implica una pérdida de generalidad.

#### 3.4.1. Construcción de modelos con gran coalición a partir de grafos fuertemente conexos

Consideraremos un grafo  $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$  fuertemente conexo a partir del cual construiremos redes con gran coalición. Los vértices del grafo  $\widehat{V} = \{1, \dots, N\}$  servirán para delimitar subregiones de la red. En efecto, en los ejemplos a continuación las neuronas de la red estarán indexadas en un

par de valores  $(i, j)$ , con  $j \in \widehat{V}$ . Además,  $j$  indicará la región  $V_j \subset V$  del grafo  $G = (V, E)$  asociado a la red neuronal, a la que el vértice  $(i, j) \in V$  pertenece.

**Definición 3.4.1.** Decimos que el grafo  $G = (V, E)$  es una  $\beta$  extensión del grafo  $\widehat{G}$ , con  $\beta \in \mathbb{N}$  si el conjunto de vértices  $V$  y el conjunto de aristas  $E$  cumplen las siguientes condiciones:

- $V = \bigcup_{i=0}^N V_j$ , donde  $V_j = \{(i, j) : i \in \{1, \dots, n_j\}\}$  tal que  $n_j \geq \beta$ ,
- $((i_1, j_1), (i_2, j_2)) \in E$  si  $(j_1, j_2) \in \widehat{E}$ .

**Comentario 3.4.2.** Se observa las siguientes propiedades de las  $\beta$ -extensiones de un grafo  $\widehat{G}$ :

- Para un mismo valor de  $\beta$ , las  $\beta$  extensiones de  $\widehat{G}$  no son necesariamente únicas.
- Si  $\beta_1 \leq \beta_2$  y si  $G$  es una  $\beta_2$  extensión de  $\widehat{G}$ , entonces  $G$  también es una  $\beta_1$  extensión de  $\widehat{G}$ .

**Ejemplo 3.4.3.** Para  $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$  con  $\#\widehat{V} = k$ , se tiene que el grafo completo  $K_{k\beta+u}$  donde  $u \geq 0$  es una  $\beta$  extensión de  $\widehat{G}$ .

**Ejemplo 3.4.4.** Para  $\widehat{G}$  y  $G$  como en la figura 3.12, se cumple que  $G$  es una 2 extensión de  $\widehat{G}$ .

**Teorema 3.4.5.** Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G$  y  $n \geq 2$ . Si  $G$  es una  $2n-1$  extensión de un grafo fuertemente conexo  $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ , entonces todo estado inicial  $\omega$  alcanza gran coalición.

Para probar 3.4.5 previamente probaremos algunos lemas que adaptan resultados de la sección anterior a este caso.

**Lema 3.4.6.** Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G$ . Si  $G$  es una  $n$  extensión de un grafo  $\widehat{G}$  fuertemente conexo, y  $\omega$  un estado inicial tal que existe  $j_0$  con  $V_{j_0} \subset J(\omega)$ , entonces  $I = J$ .

*Demostración.* Probaremos que para todo  $j \in \widehat{V}$ , todas las neuronas de la región  $V_j$  disparan simultáneamente. Lo demostraremos por inducción completa en  $d_{\widehat{G}}(j_0, j)$  (recordemos que podemos definir esta distancia porque  $\widehat{G}$  es fuertemente conexo).

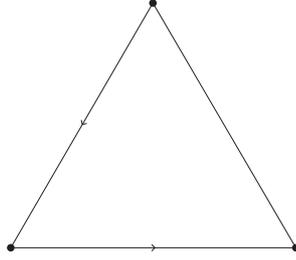


Figura 3.11: El grafo  $\widehat{G}$ .

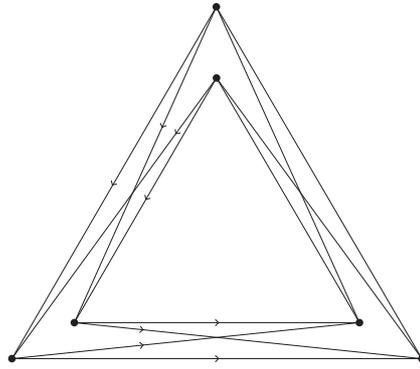


Figura 3.12: Los grafos  $\widehat{G}$  (a la izquierda) y  $G$  (a la derecha) del Ejemplo 3.4.4.

Si  $d_{\widehat{G}}(j_0, j) = 0$  tenemos que  $j = j_0$ . Como la totalidad de las neuronas de la región  $V_{j_0}$  disparan (por hipótesis), queda probado el paso base. Supongamos que si  $d_{\widehat{G}}(j_0, j) = d$ , todas las neuronas de la región  $V_j$  disparan. Probemos que si  $d_{\widehat{G}}(j_0, k) = d + 1$ , entonces todas las neuronas de la región  $V_k$  también disparan. En efecto, si  $d_{\widehat{G}}(j_0, k) = d + 1$  entonces existe  $l$  tal que

$$d_{\widehat{G}}(j_0, l) = d \quad \text{y} \quad (l, k) \in \widehat{E}.$$

Por hipótesis inductiva tenemos que todas las neuronas de la región  $V_l$  disparan. Dado que  $G$  es una  $n$  extensión de  $\widehat{G}$ , las neuronas de  $V_l$  son al menos  $n$ . Sea  $(i, k)$  una neurona cualquiera de la región  $V_k$ . Esta neurona recibirá al menos  $n$  impulsos, fruto de los disparos de las neuronas de la región  $l$ . Como  $nh \geq \theta$  obtenemos que la neurona  $(i, k)$  dispara, como queríamos demostrar.  $\square$

**Lema 3.4.7.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G$ . Si  $G$  es una  $n$  extensión de un grafo fuertemente conexo  $\widehat{G}$ , y si  $\omega$  un estado inicial tal que  $\#[V_{j_0} \cap J(\omega)] \geq n$  para algún  $j_0$ , entonces  $I = J$ .*

La demostración es análoga a la anterior.

*Demostración del Teorema 3.4.5.*

Definimos las cantidades auxiliares

$$A_j^m = \sum_{u=0}^{m-1} \#[V_j \cap J(\rho^u(\omega))] \quad j = 1, \dots, k,$$

$$B^m = \max\{A_j^m : j \in \{1, \dots, k\}\}.$$

Notar que  $A_j^m$  es la cantidad de disparos que se produjeron en  $V_j$  hasta el momento del  $m$ -ésimo disparo  $t_m$ . Es fácil ver que

$$\sum_{j=1}^k A_j^m = \sum_{u=0}^{m-1} \#J(\rho^u(\omega)) \geq m,$$

por ser  $J(\rho^u(\omega))$  no vacío.

Sea  $k = \#\widehat{V}$ , y tomemos  $m \geq nk$ . Por el principio del palomar existe  $j$  tal que  $A_j^m \geq n$ . Consideremos entonces el primer iterado  $m = m_0$  que cumple que  $A_j^m \geq n$  para algún  $j$ . Es decir,

$$m_0 = \min\{m : \exists j \text{ tal que } A_j^m \geq n\}.$$

Sea  $j_0$  algún índice tal que  $A_{j_0}^{m_0} \geq n$ . Consideremos  $j_1$  tal que  $(j_0, j_1) \in \widehat{E}$ . Tenemos que

$$\#V_{j_1} \geq 2n - 1 \quad \text{y} \quad \#A_j^{m_0-1} \leq n - 1.$$

Luego, se tiene que al menos  $n$  neuronas en  $V_{j_1}$  que no dispararon hasta el instante  $t_{m_0-1}$ . Veamos que estas neuronas necesariamente disparan en el instante  $t_{m_0}$ . En efecto, si  $(i', j_1)$  es una de ellas, entonces se cumple

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow t_{m_0}^-} \widehat{X}_{(i', j_1)}(t) + \sum_{u=0}^{m_0-1} \sum_{(i, j) \in J(\rho^u(\omega))} h_{(i, j), (i', j_1)} \geq \\ & \geq X_{(i', j_1)}(0) + \sum_{u=0}^{m_0-1} \sum_{(i, j) \in V_{j_0} \cap J(\rho^u(\omega))} h_{(i, j_0), (i', j_1)} \geq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \sum_{u=0}^{m_0-1} \sum_{(i,j) \in V_{j_0} \cap J(\rho^u(\omega))} h = h \left( \sum_{u=0}^{m_0-1} \#[V_{j_0} \cap J(\rho^u(\omega))] \right) = \\ &= hA_{j_0}^{m_0} \geq nh > \theta \geq \theta_i. \end{aligned}$$

Deducimos que  $\#[V_{j_1} \cap J(\rho^{m_0}(\omega))] \geq n$ . Luego, aplicando el Lema 3.4.7 se concluye que  $I = J$ .  $\square$

### 3.4.2. Construcción de modelos con gran coalición a partir de grafos con forma de estrella

En esta sección construiremos, a partir de un grafo con forma de estrella, un modelo de redes neuronales que garantice gran coalición para cualquier estado inicial. Si bien la construcción tiene similitudes con la de la definición 3.4.1, la esencia de estos ejemplos será tomar una red concreta que sepamos que tiene gran coalición, como  $K_N$  con  $N \geq 2n - 1$ , y extenderla.

#### Construcción de $(K, \gamma)$ extensiones

En esta sección partiremos de  $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$ , un grafo con forma de estrella, donde el conjunto de vértices es  $\widehat{V} = \{1, \dots, N\}$  y  $x_{\widehat{G}} = 1$ . Al igual que en 3.4.1, los vértices del grafo  $\widehat{G}$  servirán para delimitar subregiones del conjunto de vértices del grafo  $G$ . Pero, al igual que en la Proposición 3.3.12, necesitaremos agregar alguna hipótesis para adaptar las construcciones de la sección anterior. En este caso, la región asociada a  $x_{\widehat{G}}$  será un subgrafo particular.

**Definición 3.4.8.** Sean  $K$  un grafo y  $\gamma \in \mathbb{N}$ .

Decimos que el grafo  $G = (V, E)$  es una  $(K, \gamma)$  extensión de  $\widehat{G} = (\widehat{V}, \widehat{E})$  si se cumplen las siguientes condiciones:

- $\widehat{G}$  tiene forma de estrella
- $V = \bigcup_{j=1}^N V_j$  donde  $V_j = \{(i, j) : i \in \{1, \dots, n_j\}\}$  tal que  $n_j \geq \gamma$  para  $j \geq 2$
- $V_1 = V(K)$  y  $((i, 1), (j, 1)) \in E$  si  $(i, j) \in E(K)$

- Dado  $(i_1, j_1) \in V_{j_1}$ , si  $(j_0, j_1) \in \widehat{E}$  entonces  $\#\{i : (i, j_0), (i_1, j_1) \in E\} \geq \gamma$
- El grafo resultante  $G$  es fuertemente conexo

Esta definición es similar a la Definición 3.4.1. Podría pensarse que una  $(K, \gamma)$  extensión es una  $\gamma$  extensión de  $\widehat{G}$ , fijando  $V_1 = K$ . Sin embargo, en una  $\gamma$  extensión, si  $(j_0, j_1) \in \widehat{E}$ , entonces todas las neuronas de  $V_{j_0}$  se conectan con todas las de  $V_{j_1}$ . En esta definición debilitamos esa hipótesis, requiriendo solamente que en las circunstancias anteriores, cada neurona de  $V_{j_1}$  esté conectada con al menos  $\gamma$  de las de  $V_{j_0}$ . Finalmente le agregamos las aristas necesarias para que  $G$  sea fuertemente conexo.

**Comentario 3.4.9.** Si  $G$  es una  $(K, \gamma)$  extensión de  $\widehat{G}$ , entonces  $K$  es un subgrafo de  $G$ .

**Ejemplo 3.4.10.** En la Figura 3.13 se dan tres grafos  $K$ ,  $\widehat{G}$ , y  $G$ , donde  $G$  es una  $(K, 2)$  extensión de  $\widehat{G}$ .

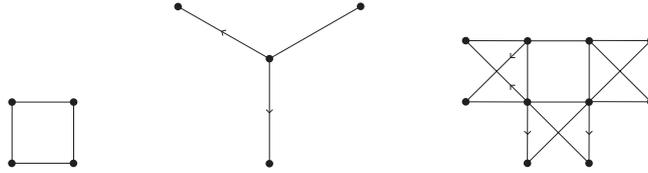


Figura 3.13: Los grafos  $K$  (a la izquierda),  $\widehat{G}$  (en el centro), y el grafo resultante  $G$  (a la derecha). En este ejemplo  $G$  es  $(K, 2)$  extensión del grafo  $\widehat{G}$ .

**Ejemplo 3.4.11.** El grafo completo  $K_{n+m(n-1)}$  es una  $(K_n, m)$  extensión de  $P_k$ .

Nuestro objetivo ahora será probar dos resultados (Teoremas 3.4.14 y 3.4.16), en los que demostraremos la existencia de gran coalición para redes neuronales cuyos grafos sean  $(K, \gamma)$  extensiones para alguno de los dos siguientes casos:

- $K = K_N$ , con  $N \geq 2n - 1$  (Teorema 3.4.14)
- $K$  es una  $2n - 1$  extensión de un grafo fuertemente conexo (Teorema 3.4.16)

La prueba de estos resultados será similar a la del Teorema 3.4.5 y para ello necesitaremos lemas previos, en particular uno análogo al lema 3.4.6:

**Lema 3.4.12.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G = (V, E)$ . Si  $G$  es una  $(K, n)$  extensión de un grafo  $\widehat{G}$ , y si  $\omega$  es un estado inicial tal que  $V_1 \subset J(\omega)$ , entonces  $J(\omega) = I$ .*

*Demostración.* Sea  $(\bar{i}, \bar{j}) \in V$  una neurona arbitraria. Como  $\widehat{G}$  tiene forma de estrella, existe un camino  $1 = j_1 \dots j_m = \bar{j}$ . Probaremos por inducción que  $V_{j_k} \subset J(\omega)$ .

Si  $k = 1$ , entonces  $(\bar{i}, \bar{j}) \in V_1 \subset J$ , por hipótesis. Asumiendo ahora que  $V_{j_k} \subset J(\omega)$  para algún  $k < m$ , probemos que  $V_{j_{k+1}} \subset J(\omega)$ . Sea  $(i_{k+1}, j_{k+1}) \in V_{j_{k+1}}$ . Entonces, su estado  $X_{(i_{k+1}, j_{k+1})}(t)$  cumple

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \bar{t}^-} X_{(i_{k+1}, j_{k+1})}(t) + \sum_{(i, j) \in J} h_{(i, j), (i_{k+1}, j_{k+1})} &\geq \sum_{(i, j_k) \in V_{j_k}} h_{(i, j_k), (i_{k+1}, j_{k+1})} \\ &\geq nh \geq \theta \geq \theta_{(i_{k+1}, j_{k+1})}. \end{aligned}$$

Luego,  $(i_{k+1}, j_{k+1}) \in J(\omega)$ . Como  $(i_{k+1}, j_{k+1})$  era arbitrario en  $V_{j_{k+1}}$ , deducimos que  $V_{j_{k+1}} \subset J(\omega)$ . Entonces, por el principio de inducción completa,  $V_{j_m} = V_{\bar{j}} \subset J(\omega)$ , y en particular  $(\bar{i}, \bar{j}) \in J(\omega)$ . Finalmente, como  $(\bar{i}, \bar{j})$  era una neurona arbitraria, deducimos  $I = J(\omega)$  como queríamos demostrar.  $\square$

Veamos ahora el caso en que  $K = K_N$ . Demostremos que en algún iterado del mapa retorno se cae en las hipótesis del lema 3.4.12; es decir  $V_1 \subset J(\omega)$ .

**Proposición 3.4.13.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G$ . Si  $G$  es una  $(K_N, n)$  extensión de otro grafo  $\widehat{G}$ , con  $N \geq 2n - 1$ , entonces dado un estado inicial  $\omega$  de la red, existe  $m \geq 1$  tal que  $V_1 \subset J(\rho^{m-1}(\omega))$ .*

*Demostración.* La idea de esta demostración es adaptar la prueba de 3.2.6. Sea

$$I_k = \bigcup_{j=0}^{k-1} J(\rho^j(\omega)) \cap V_1$$

el conjunto de las neuronas de  $V_1$  que dispararon alguna vez en los  $k$  primeros regímenes de disparos, y  $a_k = \#(J(\rho^{k-1}(\omega)) \cap V_1)$ , la cantidad de neuronas de  $V_1$  que dispararon en el  $k$ -ésimo régimen de disparo. Notar

que si bien  $a_k$  puede ser 0 para algun  $k$ , no puede ser siempre 0. Más aún, como  $G$  es fuertemente conexo, por 3.3.6 se tiene que  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^k a_i = +\infty$ .

Sea  $m$  tal que  $\sum_{i=0}^{m-1} a_i < n$  y  $\sum_{i=0}^m a_i \geq n$ . De forma análoga a lo hecho en 3.2.6, tenemos que:

$$I_m = V_1, \quad I_{m-1} \leq 1, \quad (I_{m-1})^c \subset J(\rho^{m-1}(\omega)),$$

de donde se deduce que  $V_1 \subset J(\rho^{m-1}(\omega))$ . □

Como consecuencia inmediata del Lema 3.4.12 y la Proposición 3.4.13, tenemos que para el caso  $K = K_N$  hay gran coalición si  $N \geq 2n - 1$ . Hemos demostrado entonces, el siguiente resultado:

**Teorema 3.4.14.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal cuyo grafo asociado  $G$  es una  $(K_N, n)$  extensión de  $\widehat{G}$ , con  $N \geq 2n - 1$ . Entonces, todo estado inicial  $\omega$  tiene gran coalición.*

Ahora estudiemos el caso en que el grafo  $G$  asociado a la red neuronal es una  $(K, \gamma)$  extensión, y a su vez  $K$  es un grafo como en 3.4.1:

**Proposición 3.4.15.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal con grafo asociado  $G$ . Si  $G$  es una  $(K, n)$  extensión de un grafo  $\widehat{G}$ , donde  $K$  es una  $2n - 1$  extensión de un grafo  $\widetilde{G}$  fuertemente conexo, entonces dado un estado inicial  $\omega$ , existe  $m \geq 1$  tal que  $V_1 \subset J(\rho^{m-1}(V))$ .*

Para la demostración de esta proposición basta chequear que se puede realizar una adaptación del Teorema 3.4.6, análoga a la hecha en 3.4.13. Finalmente, concluimos el siguiente resultado:

**Teorema 3.4.16.** *Sea  $\mathcal{N}$  una red neuronal cuyo grafo asociado  $G$  es una  $(K, n)$  extensión de  $\widehat{G}$ , donde  $K$  es una  $2n - 1$  extensión de un grafo  $\widetilde{G}$  fuertemente conexo. Entonces todo estado inicial  $\omega$  alcanza gran coalición.*

*Demostración.* Se deduce en forma inmediata del Lema 3.4.12 junto con la Proposición 3.4.15. □

## Capítulo 4

# Contractividad a trozos en redes inhibitorias.

**Dinámica de una red neuronal inhibitoria a grafo completo y con interacciones eficientes.**

Autores:

Agustín López de Lacalle<sup>1</sup>,  
Mauro Martínez<sup>1</sup>,  
Eleonora Catsigeras<sup>1</sup>.

Este trabajo fue realizado en el programa de introducción a la investigación de los dos primeros autores bajo la orientación de Leonardo Barboni y Eleonora Catsigeras en el marco del proyecto “Neurodinámica”, financiado por L’Oréal-Unesco, Uruguay, 2014-2016.

*MSC 2010:* Primaria: 34A37; Secundarias: 34C15, 37N25,92B20

*Palabras clave:* Red neuronal, contractividad a trozos, mapa de Poincaré.

---

<sup>1</sup>Instituto de Matemática y Estadística Prof. Ing. Rafael Laguardia (IMERL), Universidad de la República, Uruguay, Correos electrónicos: agustinl@fing.edu.uy; maumart@fing.edu.uy; eleonora@fing.edu.uy.

.

## Dinámica de una red neuronal inhibitoria a grafo completo y con interacciones eficientes.

Agustín López de Lacalle

Mauro Martínez

Eleonora Catsigeras

### Resumen.

Consideramos un modelo matemático de red con cualquier cantidad finita  $m$  de unidades dinámicas (neuronas) que interactúan mutuamente por impulsos instantáneos inhibitorios. Consideramos redes con grafo completo y pesos de interacciones eficientes en relación a la dinámica libre de cada neurona. Las variables de estado del sistema evolucionan en un cubo  $m$ -dimensional  $B \subset \mathbb{R}^m$ . Consideramos un mapa  $\rho$  de retorno a una sección de Poincaré en  $B$ , y demostramos que  $\rho$  es continuo a trozos y uniformemente contractivo en cada trozo, para una cierta métrica adecuadamente definida en  $B$ . Este resultado generaliza a redes heterogéneas y con hipótesis menos restrictivas, algunos teoremas previamente demostrados en la bibliografía.

### Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento dinámico de un modelo matemático de red neuronal inhibitoria con cualquier cantidad finita de neuronas y grafo completo de interacciones sinápticas negativas y suficientemente fuertes. En el Teorema 4.3.12 demostraremos que la dinámica de la red se reduce al estudio del sistema por iterados de un mapa de Poincaré contractivo a trozos.

La contractividad a trozos del mapa de retorno de Poincaré, permite aplicar a la dinámica de este tipo de redes neuronales, los resultados generales sobre sistemas dinámicos por iterados de mapas contractivos a trozos, como por ejemplo los demostrados en [19, 3, 11, 9]. En particular, bajo ciertas hipótesis adicionales, los mapas contractivos a trozos tienen un atractor formado por una cantidad finita de ciclos límite periódicos. Por ejemplo, en [7] se demuestra que cuando el mapa de retorno de Poincaré de una red neuronal es contractivo a trozos y verifica la “propiedad

de separación”, entonces genéricamente en la topología  $C^0$  de las transformaciones continuas en cada trozo de contractividad, el atractor está formado por una cantidad finita de ciclos límite periódicos.

La contractividad a trozos del mapa de Poincaré en una red neuronal inhibitoria fue demostrada hasta ahora en hipótesis más restrictivas que las que se asumen en este trabajo. En efecto, en [8] se demuestra la contractividad a trozos para redes inhibitorias con interacciones fuertes y grafo completo, pero en el caso homogéneo. Esto es: todas las neuronas tienen idéntica dinámica libre entre disparos. En [8] se asume además que la ecuación diferencial de la dinámica libre entre disparos es lineal, de la forma  $dV_i/dt = -\alpha V_i + \beta$ , donde  $V_i$  es la diferencia de potencial de membrana en la neurona  $i$ ,  $t$  es el tiempo entre disparos, y  $\alpha$ ,  $\beta$  son constantes positivas, independientes de  $V_i$  y de  $t$ , y de  $i$ .

En este trabajo, en cambio, consideramos la dinámica libre gobernada por una ecuación diferencial general, de la forma  $dV_i/dt = \gamma_i(V_i)$ , no necesariamente lineal, y además con funciones  $\gamma_i$  que dependen arbitrariamente de la neurona  $i$ .

En [10] se demuestra que las redes neuronales inhibitorias con grafo completo, interacciones fuertes, y neuronas no necesariamente idénticas, pero muy parecidas entre sí, tienen un mapa de Poincaré contractivo a trozos. En este trabajo, en el Teorema 4.3.12, generalizamos ese resultado previo al caso en que las neuronas (todas inhibitorias) son arbitrariamente diferentes entre sí.

El Teorema 4.3.12 que demostraremos aquí, es un resultado abstracto relativo, como se dijo más arriba, a la dinámica contractiva a trozos de redes inhibitorias con grafo completo, e interacciones eficientemente fuertes. No tiene restricciones sobre la cantidad (finita) de neuronas en la red. Estas son, en forma abstracta y simplificada, unidades dinámicas acopladas por impulsos, según modelos dinámicos deterministas utilizados en la literatura, por ejemplo, en [26, 29]. El estudio del comportamiento dinámico de este tipo de redes abstractas, es aplicable a la comprensión y diseño de redes idealizadas por medio de un modelo matemático simple, compuestas, por ejemplo, por un gran número de osciladores mutuamente acoplados. Estos modelos aparecen en aplicaciones a la física de LCO (sigla en inglés de “osciladores acoplados por luz”, ver por ejemplo [34, 36]).

También aparecen aplicaciones a la ingeniería de confiabilidad en comunicaciones [42], en el diseño o control de varios tipos de sistemas mode-

lables matemáticamente como redes o subredes dinámicas deterministas, compuestas por una gran cantidad de unidades o “neuronas” artificiales, acopladas por impulsos.

Finalmente, en la bio-ingeniería, la biofísica y la neurociencias, las redes abstractas de unidades dinámicas acopladas modelan matemáticamente ciertos sub-sistemas o subconjuntos de células u otras entidades biológicas, siempre que las mismas estén mutuamente acopladas por interacciones que sean pasibles de ser modeladas matemáticamente en forma determinista.

#### 4.0.1. Organización de este trabajo.

En la sección 4.1 definimos el modelo matemático utilizado y las hipótesis empleadas de grafo completo y de interacciones sinápticas eficientes.

En la sección 4.2 construimos una sección de Poincaré transversal a las órbitas del sistema dinámico que modela la red neuronal, y en ella el mapa  $\rho$  de primer retorno, llamado “mapa de Poincaré”. Finalmente, en esta sección, encontramos una expresión matemática de  $\rho$ , aplicable sin necesidad de conocer la expresión analítica de las soluciones de las ecuaciones diferenciales generales que gobiernan el sistema, y ni siquiera la expresión analítica concreta de estas ecuaciones.

En la sección 4.3 demostramos el Teorema 4.3.12, que constituye el resultado principal de este trabajo, cuyo enunciado es el siguiente:

*El mapa de retorno de Poincaré de una red inhibitoria a grafo completo y con interacciones sinápticas eficientes, es contractivo a trozos. Es decir, el espacio se parte en una cantidad finita de piezas tales que en cada una de ellas el mapa de Poincaré contrae uniformemente las distancias, aunque en la frontera común de dos o más de ellas, el mapa de Poincaré es discontinuo.*

### 4.1. Redes neuronales inhibitorias con grafo completo

#### 4.1.1. Descripción general del modelo

##### Definición 4.1.1. (Neurona abstracta y umbral de disparo)

Definimos *neurona* como un elemento, o celda, o unidad dinámica, que denotamos como  $i$ , cuyo estado en el instante  $t \in \mathbb{R}^+$  está dado por una

variable real  $\Phi_i(t)$ , que es solución de una ecuación diferencial

$$\frac{d\Phi_i(t)}{dt} = \gamma_i(\Phi_i),$$

donde  $\gamma_i$  es una función real de variable real dada. Dicha solución está definida entre un valor mínimo  $-V_{\min} < 0$  y un umbral  $\theta_i > 0$ , que depende de la neurona, llamado *umbral de disparo* o también *potencial de umbral*. Por lo tanto

$$\Phi_i(t) \in [-V_{\min}, \theta_i).$$

En el caso de los modelos abstractos más simples de neuronas biológicas,  $\Phi_i(t)$  representa la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la célula, llamada “potencial de membrana” de la neurona, en el instante  $t$ .

**Definición 4.1.2. (Disparo de una neurona)**

Decimos que la neurona  $i$  *dispara* en el instante  $t$ , cuando su variable de estado  $\Phi_i(t)$  alcanza el potencial de umbral  $\theta_i$ . Por convención, cuando la neurona  $i$  dispara en el instante  $t$ , su potencial  $\Phi_i$  se resetea al valor 0 en forma instantánea. Es decir,  $\Phi_i$  es discontinua en el instante  $t$  siendo su límite por la izquierda (para tiempos menores que  $t$  en un entorno de  $t$ ), igual al potencial de umbral  $\theta_i$ , y su límite por la derecha (para tiempos mayores que  $t$  en un entorno de  $t$ ), igual a cero.

**Definición 4.1.3. (Interacción sináptica inhibitoria)** Definimos la *interacción sináptica*  $-h_{ij}$  de la neurona  $i$  hacia la neurona  $j$ , como la cantidad, con signo, que se suma al potencial  $\Phi_j(t)$  de la neurona  $j$ , en todo instante  $t$  tal que la neurona  $i$  dispara. Dicho de otra manera,  $h_{ij}$  es el salto de discontinuidad en la función  $\Phi_j(t)$  en todo instante  $t$  tal que  $\Phi_i(t) = \theta_i$ .

Decimos que una interacción sináptica  $-h_{ij}$  es *inhibitoria* cuando es estrictamente negativa, es decir:  $-h_{ij} < 0$

**Ejemplo de grafo completo de red inhibitoria.**

Consideramos una red neuronal de  $m = 3$  neuronas, cuyo grafo orientado de interacciones sinápticas está representado en la figura 4.1. En esta red, las neuronas están todas conectadas dos a dos bidireccionalmente.

**Definición 4.1.4. (Red inhibitoria de grafo completo)**

Un grafo con una cantidad finita de vértices  $i \in I$ , y aristas  $(i, j) \in I \times I$  direccionadas y pesadas con pesos  $-h_{ij}$ , representa una *red neuronal inhibitoria de grafo completo* cuando los pesos  $-h_{ij}$  son estrictamente negativos para toda arista, y el conjunto de aristas es el de todas las parejas ordenadas  $(i, j)$  tales que  $i \neq j$ .

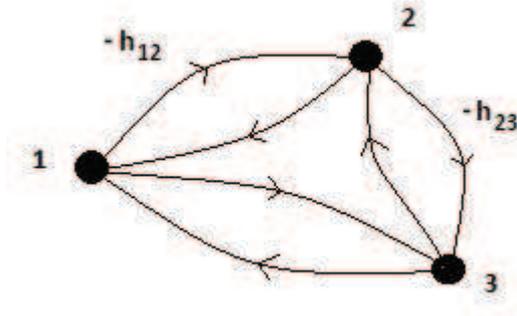


Figura 4.1: Grafo completo de una red neuronal inhibitoria con  $m = 3$  neuronas.

**4.1.2. Dinámica individual de la neurona (“Dinámica libre”)**

En esta subsección veremos el modelo matemático que determina la dinámica de una neurona  $i$  cuando no interactúa con otras. El potencial membrana  $\Phi_i(t)$  es la variable que describe en cada instante  $t$  el estado de la neurona. Asumiremos por hipótesis que  $\Phi_i(t)$  es la solución de la siguiente ecuación diferencial autónoma, no necesariamente lineal:

$$\dot{\Phi}_i = \gamma_i(\Phi_i), \quad \text{donde} \quad (4.1)$$

$$\gamma_i(x) > 0, \quad \gamma_i'(x) < 0 \quad \forall x \in [-V_{\min}, \theta_i], \quad (4.2)$$

con  $V_{\min} < 0$  y  $\theta_i > 0$  constantes reales.

**Definición 4.1.5. (Régimen entre disparos)**

Las condiciones (4.1) y (4.2) son, por hipótesis, las que rigen la dinámica que denominamos *régimen entre disparos de la dinámica libre* de la neurona  $i$ .

Derivando la ecuación (4.1) respecto de  $t$ , y aplicando después las condiciones (4.2), obtenemos:

$$\frac{d^2\Phi_i}{dt^2} = \frac{d(d\Phi/dt)}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma_i(\Phi_i)) = \gamma_i(\Phi_i) \cdot \gamma'_i(\Phi_i) < 0$$

Como establecimos por hipótesis que  $\gamma_i > 0$  y  $\gamma'_i < 0$ , la ecuación de arriba implica que la derivada segunda de  $\Phi_i$  respecto del tiempo es negativa.

**Definición 4.1.6. (Régimen de disparo)**

La hipótesis que rige lo que llamaremos *régimen de disparo* de la neurona  $i$  es la siguiente:

$$\text{Si } \Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i \text{ entonces } \Phi_i(t_0) = 0, \text{ donde} \quad (4.3)$$

$$\Phi_i(t_0^-) := \lim_{t \rightarrow t_0^-} \Phi_i(t)$$

En los instantes  $t$  para los cuales se verifica la condición (4.3) decimos que la neurona *dispara* y su estado se *resetea a cero* en forma instantánea (Ver Figura 4.2).

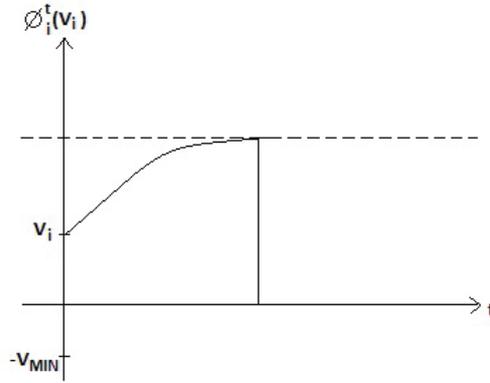


Figura 4.2: Disparo de una neurona. Cuando su variable de estado alcanza el umbral positivo, se resetea a cero.

Recordemos que el estado de la neurona  $i$  en el instante  $t \in \mathbb{R}^+$  está descrito por el valor real de la función  $\Phi_i(t)$ , donde

$$\Phi_i(t) \in X_i = [-V_{\min}, \theta_i]$$

es una solución de la ecuación diferencial (4.1). Debido a la condición  $\gamma_i > 0$  en el compacto  $X_i$ , por el teorema de Weierstrass  $\gamma_i$  tiene un mínimo positivo  $M > 0$ . Por lo tanto la velocidad  $d\Phi_i(t)/dt$  de variación del estado de la neurona es positiva, y acotada inferiormente por arriba por cero. Dicho de otra forma, la función  $\Phi_i(t)$  es estrictamente creciente en el tiempo, y su derivada está acotada inferiormente por una constante  $M > 0$ . Por lo tanto, deducimos la siguiente afirmación:

$$\forall \Phi_i(0) \in X_i \quad \exists t_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad \Phi_i(t_0^-) = \theta_i > 0. \quad (4.4)$$

Dicho de otra forma, cualquiera sea el estado inicial  $\Phi_i(0)$  de la neurona en el compacto  $X_i$ , existe un instante positivo tal que el estado alcanza el umbral de disparo  $\theta_i > 0$ , y por lo tanto, la neurona dispara y su estado se resetea a cero. Esto es lo que caracteriza a las llamadas neuronas marcapasos, diferenciándolas de aquellas que solo disparan si son excitadas exteriormente.

En resumen, las condiciones (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4) son las que gobiernan la dinámica libre de la neurona  $i$ . Las dos primeras corresponden al régimen entre disparos de la dinámica libre, y las dos últimas al régimen de disparo.

### 4.1.3. Interacciones sinápticas

Expondremos a continuación las hipótesis por impulsos instantáneos que modelan las acciones sinápticas recibidas por la neurona  $i$  desde las demás neuronas  $j \neq i$  de la red.

Sea  $m \geq 2$  la cantidad de neuronas del sistema. Sea  $\{1, 2, \dots, m\}$  el conjunto de neuronas en la red. Denotamos como

$$I_0(t_0) \subset \{1, 2, \dots, m\}$$

al conjunto de las neuronas que disparan en el instante  $t_0$ .

Suponemos dado el grafo de red, con vértices  $\{1, 2, \dots, m\}$  y aristas  $(i, j)$  donde  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$  tales que  $i \neq j$ . Las aristas son orientadas; es decir  $(i, j)$  y  $(j, i)$  son aristas diferentes. Además son pesadas: denotamos  $-h_{ji} \leq 0$  al peso de la arista  $(j, i)$ . Estos pesos se llaman *valores de las interacciones sinápticas* de la red neuronal. La red es inhibitoria, por eso todos los pesos no nulos son negativos.

El modelo matemático de interacciones sinápticas responde a las siguientes ecuaciones, donde  $\Phi_i(t_0)$  es el estado de la neurona  $i$  en el instante

$t_0$ , y  $\tilde{\Phi}_i(t_0)$  es simplemente una variable auxiliar:

$$\tilde{\Phi}_i(t_0) = \begin{cases} \Phi_i(t_0^-) - \sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji} & \text{si } \Phi_i(t_0^-) < \theta_i, \text{ es decir si } i \notin I(t_0), \\ 0 & \text{si } \Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i, \text{ es decir si } i \in I(t_0). \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\Phi_i(t_0) = \text{máx}\{\tilde{\Phi}_i(t_0), -V_{\text{mín}}\} \quad (4.6)$$

Como  $-V_{\text{mín}} < 0$ , tenemos  $\Phi_i(t_0) = \tilde{\Phi}_i(t_0) = 0$  si  $\Phi_i(t_0^-) \geq \theta_i$ . Esa condición traduce el hecho de que toda neurona  $i \in I(t_0)$ , o sea toda neurona que dispara en el instante  $t_0$ , pasa instantáneamente al estado cero de reset, y es por lo tanto inmune a las interacciones sinápticas  $-\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji}$  de las demás neuronas  $j$  en ese instante  $t_0$ . En breve, no rige

la igualdad de arriba en (4.5) cuando  $i \in I(t_0)$ . Esta condición traduce a lenguaje matemático el fenómeno biológico llamado *refractario*.

La ecuación (4.6) traduce matemáticamente que el estado  $\Phi_i(t_0)$  de una neurona  $i$  no puede nunca ser menor a la cota inferior  $-V_{\text{mín}}$ , aunque reciba un total  $-\sum_{\substack{j \neq i \\ j \in I(t_0)}} h_{ji}$  muy grande en valor absoluto de interacciones

negativas provenientes de las demás neuronas de la red.

Finalmente, definimos el estado de la red neuronal en el instante  $t$  mediante la siguiente  $m$ -upla:

$$\vec{\Phi}(t) := (\Phi_1(t), \Phi_2(t), \dots, \Phi_m(t)), \quad (4.7)$$

donde

$$\vec{\Phi}(t) \in \prod_{i=1}^m [-V_{\text{mín}}, \theta_i] \quad \forall t \geq 0. \quad (4.8)$$

**Definición 4.1.7. (Espacio de fases  $Q$ , flujo  $\Phi$  y órbitas)**

El valor vectorial  $\vec{\Phi}(t)$  varía en el siguiente espacio métrico

$$Q := \prod_{i=1}^m [-V_{\text{mín}}, \theta_i],$$

cuya adherencia  $\overline{Q}$  es compacta (es decir cerrada y acotada). Observamos que el espacio  $Q \subset \mathbb{R}^m$  es un prisma  $m$ -dimensional.

Llamamos *espacio de fases* de la red neuronal al conjunto  $Q$ . En lo que sigue, denotamos  $V = (V_1, \dots, V_m) \in Q$  y

$\vec{\Phi}^t(V)$  para  $t > 0$  y  $V \in Q$  dados, al estado  $\vec{\Phi}(t) \in Q$  tal que  $\vec{\Phi}(0) = V$ .

Llamaremos a la función  $\vec{\Phi}$  que depende de las dos variables independientes  $t \geq 0$  en  $\mathbb{R}$ , y  $V \in Q$ , el *flujo de la red neuronal*. Es un flujo en  $Q$  con discontinuidades, debido a las hipótesis de reset y a las hipótesis de sinapsis por impulsos instantáneos.

Llamaremos *órbita con estado inicial*  $V$  a la curva paramétrica con discontinuidades  $\left\{ \vec{\Phi}^t(V) \right\}_{t \geq 0}$  con  $V \in Q$  fijo, y el tiempo  $t \geq 0$  como parámetro variable.

Observamos que según la Definición 4.1.7 se cumple  $\vec{\Phi}^0(V) = V$  para todo  $V \in Q$ ; o equivalentemente  $\vec{\Phi}^0$  es la función identidad en el prisma  $Q$ .

#### 4.1.4. Hipótesis de interacciones eficientes

##### Definición 4.1.8. (Interacciones sinápticas eficientes)

Decimos que una red neuronal tiene grafo completo si  $h_{i,j} \neq 0$  para todo  $i \neq j$ . Decimos que tiene *interacciones sinápticas eficientes* cuando los pesos  $\{-h_{ij}\}_{i \neq j}$  de las interacciones cumplen la siguiente condición:

$$\min_j \min_{-1 \leq V_j \leq 1} \left| \frac{\gamma'_j(V_j)}{\gamma_j(V_j)} \right| \cdot h \geq \log 2, \quad \text{donde } h := \min_{i \neq j} \{h_{ij}, |\theta_i|\},$$

donde  $\theta_i$  es el potencial de umbral de la neurona  $i$ . En nuestro caso estamos asumiendo una escala en la medida de los potenciales de las neuronas tal que  $\theta_i = 1$  para todo  $i$  y el potencial de reset es  $V_{\text{reset}} = 0$ . Por lo tanto el salto de reset de la neurona  $i$  cuando llega al umbral es  $V_{\text{reset}} - \theta_i = -1$ . Si usamos la convención de denotar  $-h_{ii}$  a este salto de reset como si fuera (desde el punto de vista matemático, pero no biológico) una acción de la neurona  $i$  sobre sí misma cuando alcanza su potencial de umbral, resulta

$$h = \min_{i,j} h_{ij}.$$

**Interpretación de la hipótesis de interacciones sinápticas eficientes:** El peso en valor absoluto de las interacciones sinápticas (dado

por  $h$ ), es suficientemente fuerte en relación al cambio continuo en el potencial  $V_j$  de la neurona durante el régimen libre entre disparos de la red, que está medido por  $\gamma_j(V_j)/\gamma'_j(V_j)$ . La argumentación biofísica interpreta esta hipótesis en que la permeabilidad de membrana en la neurona post-sináptica  $j$  (esto es, la neurona que recibe la acción sináptica  $h_{ij}$  producida por un disparo de la neurona pre-sináptica  $i$ ), es muy diferente durante la acción sináptica con respecto a lo que es durante el tiempo de relajación. Dicho de otra forma, debido a la apertura brusca de canales iónicos, se produce un cambio en el flujo de iones a través de la membrana durante las acciones sinápticas. Este cambio es distinguible y pronunciado en relación con el flujo iónico, lento pero permanente y relativamente pequeño, que se produce durante los intervalos de tiempo de relajación entre disparos.

## 4.2. Construcción de la sección y del mapa de Poincaré.

Para poder obtener conclusiones sobre la dinámica de las órbitas

$$\left\{ \vec{\Phi}^t(V) \right\}_{t \geq 0},$$

estudiamos los cortes de estas órbitas con una sección transversal a todas ellas, llamada *sección de Poincaré*.

Una vez elegida la sección de Poincaré, estudiaremos la dinámica por iterados del mapa de retorno  $\rho(V)$ , de la órbita  $\{\vec{\Phi}^t(V)\}_{t \geq 0}$  por el punto  $V$ , cuando retorna para tiempo  $t > 0$  de nuevo a la sección de Poincaré. Este mapa de retorno se llama *mapa de Poincaré*.

Obtendremos como resultado una sucesión de puntos  $V, \rho(V), \rho^2(V), \rho^3(V), \dots$ , todos pertenecientes a la sección transversal de Poincaré, y que corresponden a los sucesivos pasajes de la órbita  $\{\vec{\Phi}^t(x)\}_{t \geq 0}$  por dicha sección.

Llamaremos a la sucesión  $\{\rho^n(V)\}_{n \geq 0}$  la *órbita discreta* del punto  $V$  por iterados del mapa de Poincaré  $\rho$ .

Una propiedad relevante en la búsqueda de órbitas periódicas por un flujo  $\vec{\Phi}^t(V)$  es la siguiente:

*Si la órbita discreta por iterados del mapa de Poincaré es periódica, entonces la órbita por el flujo con el mismo estado inicial, es también es periódica.*

#### 4.2.1. tiempos de disparo

De la Sección 4.1 retomamos la ecuación diferencial  $m$ -dimensional que regula el comportamiento de las neuronas en la dinámica libre en régimen entre disparos.

$$\frac{d\vec{\psi}^t}{dt} = \vec{\gamma}(\vec{\psi}^t), \quad (4.9)$$

donde

$$\vec{\gamma}(\vec{\psi}^t) = (\gamma_1(\psi_1^t), \gamma_2(\psi_2^t), \dots, \gamma_m(\psi_m^t))$$

es la función vectorial cuyas componentes son las funciones reales de una variable real  $\gamma_i$  definidas en (4.1) y (4.2). En la igualdad anterior, usamos la notación  $\vec{\psi}^t = (\psi_1^t, \psi_2^t, \dots, \psi_m^t)$ .

Por medio de un cambio de variables lineal, podemos modificar la escala de medida en el espacio  $\prod_{i=1}^m [-V_{\min}, \theta_i]$ , de forma que  $-V_{\min} = -1$ , y  $\theta_i = 1$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Obtenemos entonces

$$Q = [-1, 1]^m,$$

y para todo estado inicial  $V \in Q$ , se cumple  $V = (V_1, \dots, V_m) \in [-1, 1]^m$ , donde  $V_i \in [-1, 1)$  es el estado inicial de la neurona  $i$ .

Observamos que el cubo  $m$ -dimensional  $Q = [-1, 1]^m$  no es ni abierto ni cerrado. El cubo cerrado  $\overline{Q}$  es compacto, pues es cerrado y acotado.

**Comentario 4.2.1.** En el futuro necesitaremos considerar la ecuación diferencial (4.9) definida en todo  $\mathbb{R}^m$ . Para ello extendemos las funciones  $\gamma_i$  a todo  $\mathbb{R}^m$  de modo que sea  $C^1$  en todo  $\mathbb{R}^m$ , que  $\gamma_i > 0$  sea acotada inferiormente por una cota mayor cero, y que  $\gamma'_i < 0$  sea acotada superiormente por una cota menor que cero. Tal extensión existe debido al Lema de Uryson (ver por ejemplo el Lema 2.2.10 de [37]).

#### Definición 4.2.2. (Flujo ficticio extendido)

El *flujo ficticio extendido* es la solución general  $\vec{\psi}$  de la ecuación diferencial (4.9), definida para todo  $t \in \mathbb{R}$  y todo estado inicial  $V \in \mathbb{R}^m$ . El *potencial ficticio extendido*  $\psi_i^t(V_i)$  de la neurona  $i$  con estado inicial  $V_i \in \mathbb{R}$ , incluso cuando  $V_i \notin [-1, 1]$ , es por definición, la  $i$ -ésima componente  $\psi_i$  del flujo ficticio extendido  $\vec{\psi}$ , con condición inicial  $\psi_i^0(V_i) = V_i$ .

Observar que el potencial instantáneo  $\Phi_i^t(V_i)$  de la neurona  $i$  en el instante  $t$ , tal que  $\Phi_i^0 = V_i$ , cumple:

$$\Phi_i^t(V_i) = \psi_i^t(V_i) < 1, \quad (4.10)$$

si y solo si para  $t > 0$  la neurona  $i$  está en el régimen de dinámica libre entre disparos durante todo el intervalo de tiempo  $[0, t]$ .

**Definición 4.2.3. (Primer instante de disparo  $t_i(V_i)$  de la neurona  $i$ )**

El primer *instante*  $t_i(V_i) > 0$  de *disparo espontáneo* de la neurona  $i$  (si no estuviera acoplada a la red y si no tuviera la condición de reset), es por definición, el (único) instante positivo para el cual el potencial ficticio extendido  $\psi_i^t(V_i)$  de la neurona  $i$  con estado inicial  $V_i \in [-1, 1)$  es igual al umbral 1. En ecuaciones:

$$\{t_i(V_i)\} := \{t > 0: \psi_i^t(V_i) = 1\}. \quad (4.11)$$

**Nota:** Es importante observar que la función  $t_i(V_i)$  dada por la ecuación (4.11), es una función implícita definida por la ecuación

$$\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i) = 1, \quad (4.12)$$

donde  $\psi_i$  es la componente  $i$ -ésima de la solución general  $\vec{\psi}$  de la ecuación diferencial (4.9), que está definida en forma extendida en todo  $\mathbb{R}^m$ .

**Definición 4.2.4. (Primer instante de disparo  $\bar{t}(V)$  de la red)**

El primer *instante de disparo*  $\bar{t}(V)$  de la red, con estado inicial  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ , es el mínimo de los instantes  $t_i(V_i)$  de disparo espontáneo de las neuronas. Más precisamente:

$$\bar{t}(V) := \min_{1 \leq i \leq m} t_i(V_i). \quad (4.13)$$

De las igualdades (4.5) y (4.6) obtenemos que

$$\Phi_i^{\bar{t}(V)}(V) = 0 \quad \text{si } i \in I(\bar{t}(V)), \text{ es decir si } t_i(V) = \bar{t}(V).$$

Dicho de otra forma, el estado de la red en el instante de disparo  $\bar{t}(V)$  es un punto del prisma  $Q = [-1, 1]^m$  que tiene alguna componente igual a cero.

Recordemos la Definición 4.1.8 de interacciones sinápticas eficientes en la red neuronal. De la definición del instante  $\bar{t}(V)$  dada arriba obtenemos la siguiente propiedad, como consecuencia de la eficiencia de las interacciones sinápticas:

**Lema 4.2.5. (Desigualdad para redes inhibitorias con interacciones eficientes)**

Sea una red neuronal inhibitoria de grafo completo e interacciones sinápticas eficientes. Sea  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$  un estado inicial de la red, y sea  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  una neurona que dispara en el primer tiempo de disparo de la red,  $\bar{t}(V) = t_i(V_i)$ . Entonces se cumple la siguiente desigualdad:

$$\left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} \right| < 1/2 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}.$$

*Demostración:* Tomando logaritmo y exponencial con base  $e$ , tenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} = \\ & \exp\left(\log \gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)) - \log \gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})\right) = \\ & \exp\left(\int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j\right) = \\ & \exp\left(-\int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j\right). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Por la hipótesis (4.2) la función en el integrando de la derecha,  $-\gamma'/\gamma$ , es estrictamente positiva. Como por hipótesis la red es de grafo completo, tenemos  $h = \min_{i \neq j} |h_{i,j}| > 0$ . La red es inhibitoria, es decir  $-h_{i,j} < 0$ . Deducimos que  $-h_{i,j} \leq -h < 0$  para todos  $i, j$ . Por lo tanto el intervalo de integración en la igualdad (4.14) resulta

$$[\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}, \psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)] \supset [\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h, \psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)].$$

Como la función en el integrando es positiva deducimos:

$$\int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij}}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \geq \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma'_j(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j.$$

Sustituyendo en la igualdad (4.14) obtenemos:

$$\frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} \leq \exp \left( - \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{-\gamma_j'(W_j)}{\gamma_j(W_j)} dW_j \right). \quad (4.15)$$

Por la definición 4.1.8 de interacciones eficientes, sabemos por hipótesis que:

$$\frac{-\gamma_j'(W_j)}{\gamma_j(W_j)} = \left| \frac{-\gamma_j'(W_j)}{\gamma_j(W_j)} \right| > \frac{\log 2}{h}.$$

Luego, sustituyendo en la desigualdad (4.15) deducimos que:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j))}{\gamma_j(\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h_{ij})} &< \exp \left( - \int_{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j) - h}^{\psi_j^{t_i(V_i)}(V_j)} \frac{\log 2}{h} dW_j \right) = \\ &\exp(-\log 2) = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

como queríamos demostrar.  $\square$

#### 4.2.2. Mapa de retorno (mapa de Poincaré).

De la Definición 4.2.4 recordamos que el estado de la red, que está descrito por un punto en el cubo  $Q \subset \mathbb{R}^m$ , inmediatamente en el instante del primer disparo  $\bar{t}$  (en realidad inmediatamente después), tiene alguna componente nula. Esto es debido a la condición de reset de las neuronas que dispararon en el instante  $\bar{t}$ , y a que hemos tomado una escala de potenciales tal que el potencial de reset es nulo.

Justamente, el conjunto de puntos en el cubo  $Q$  que tienen nula alguna componente, será lo que definiremos a continuación como sección de Poincaré:

##### Definición 4.2.6. (Sección de Poincaré)

La *Sección de Poincaré* es

$$B := \{V \in Q = [-1, 1]^m : \exists i \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ tal que } V_i = 0\}.$$

Veamos por ejemplo el caso  $m = 3$ . La sección de Poincaré en este caso está formada por la unión de tres cuadrados, cada uno contenido en uno de los tres planos coordenados, pues cada plano coordenado tiene por

ecuación  $V_i = 0$ , con  $i = 1, 2$  ó  $3$  respectivamente. En cada plano  $V_i = 0$ , cada una de las otras dos coordenadas  $j \neq i$  debe estar comprendida en el intervalo  $[-1, 1]$ . Por lo tanto, en cada plano coordenado, la sección de Poincaré es el cuadrado  $[-1, 1]^2$ .

La sección de Poincaré  $B$  definida arriba, es *transversal al flujo*  $\vec{\psi}^t$ , es decir es transversal a cada órbita  $\{\vec{\psi}^t(V)\}_{t \geq 0}$  tal que  $V \in B$ . En efecto, para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  fijo, la sección de Poincaré contiene un cuadrado del hiperplano  $\{V \in \mathbb{R}^m : \dots V_i = 0\}$ . Este hiperplano es transversal a la órbita  $\{\vec{\psi}^t(V)\}_{t \geq 0}$ , porque la componente  $i$ -ésima del vector tangente a esa órbita es  $d\psi_i^t/dt = \gamma_i > 0$ , transversal al hiperplano de los vectores que tienen nula su  $i$ -ésima componente.

**Definición 4.2.7. (Mapa de retorno o de Poincaré)**

Llamamos *mapa de retorno* a la sección  $B$  de Poincaré, o en breve *mapa de Poincaré* a la transformación  $\rho : B \mapsto B$  definida por

$$\rho(V) = \vec{\Phi}^{\bar{t}(V)}(V) \quad \forall V \in B,$$

donde  $\bar{t}(V)$ , según la Definición 4.2.4, es el instante de disparo de la red con estado inicial  $V$ ; y  $\vec{\Phi}$  es el flujo cuyas componentes están determinadas por las ecuaciones (4.5) y (4.6).

Dicho de otra forma,  $\rho(V)$  es el estado  $W$  de la red con estado inicial  $V \in B$ , cuando por lo menos una neurona, digamos  $i$ , dispara y se resetea a cero. Esta condición de reset instantáneo cuando la neurona  $i$  llega al umbral 1 y dispara, se traduce en lo siguiente:

$$\vec{\Phi}_i^{\bar{t}(V)}(V) = \psi_i^{\bar{t}(V)}(V) = 1 \quad \text{y} \quad W_i = \Phi_i^{\bar{t}(V)}(V) = 0.$$

La igualdad  $W_i = 0$  implica, por la definición de sección de Poincaré, que  $W = \rho(V) \in B$ . Por lo tanto  $\rho : B \mapsto B$ .

Cuando  $I(\bar{t}(V)) = \{i\}$ , es decir cuando la única neurona que llega espontáneamente al potencial de umbral y dispara es la neurona  $i$ , tomamos por convención la siguiente notación:

$$h_{ii} := 1.$$

Entonces podemos escribir la  $i$ -ésima componente  $W_i$  de  $W = \rho(V)$  del siguiente modo

$$W_i = \psi_i^{\bar{t}(V)}(V) - h_{ii},$$

porque  $\psi_i^{t_i(V)}(V) = 1$ ,  $h_{ii} = 1$  y  $W_i = 0$ . Usando esta convención, junto con las ecuaciones (4.5), (4.6), (4.10), y la definición del mapa de Poincaré, deducimos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \rho(V) &= \left( \rho_1(V), \rho_2(V), \dots, \rho_m(V) \right) \\ \text{Si } I(\bar{t}(V)) &= \{i\}, \text{ entonces} \\ \tilde{\rho}_j(V) &:= \psi_j^{t_i(V)}(V) - h_{ij} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \text{ y} \quad (4.16) \\ \rho_j(V) &:= \max \left\{ -1, \tilde{\rho}_j(V) \right\}. \quad (4.17) \end{aligned}$$

### 4.3. Contractividad del mapa de Poincaré

Como se dijo en la introducción, el objetivo de este trabajo es demostrar que el mapa de Poincaré de la red inhibitoria es un mapa contractivo a trozos. Primero entonces, definamos qué es un mapa contractivo a trozos.

#### 4.3.1. Definición de mapa contractivo a trozos

Sea  $B \subset \mathbb{R}^m$  tal que su clausura  $\bar{B}$  es un compacto (cerrado y acotado) no vacío.

##### Definición 4.3.1. (Mapa contractivo)

Un mapa  $\rho : B \rightarrow B$  se dice *contractivo* si existe una métrica  $\text{dist}$  en  $\bar{B}$ , que induce la topología heredada por  $\bar{B}$  de su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ , y existe una constante  $\lambda$  con  $0 \leq \lambda < 1$ , tal que

$$\text{dist}(\rho(x), \rho(y)) \leq \lambda \text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in B.$$

Notar que si  $\rho$  es contractivo, entonces  $\rho$  es continuo.

##### Definición 4.3.2. (Mapa contractivo a trozos y piezas de contractividad).

Un mapa  $\rho : B \mapsto B$  se dice *contractivo a trozos* (con  $N \geq 2$  trozos o piezas de contractividad) si existe una métrica  $\text{dist}$  en  $\bar{B}$  que induce la topología heredada por  $\bar{B}$  de su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ , y si

$$\bar{B} = \bigcup_{i=1}^N \bar{B}_i,$$

donde  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq N}$  son abiertos tales que  $B_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ , y tales que la restricción  $\rho|_{B_i} : B_i \mapsto B$  es un mapa contractivo con respecto a  $\text{dist}$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ .

Es decir, existe  $\lambda$  con  $0 \leq \lambda < 1$  tal que

$$\text{dist}(\rho(x), \rho(y)) \leq \lambda \text{dist}(x, y) \quad \forall x, y \in B_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Notar que si  $\rho$  es contractivo a trozos, entonces  $\rho|_{B_i}$  es continuo para cada  $i$ , pero  $\rho$  no es necesariamente continuo en  $B$ . En particular,  $\rho$  puede tener discontinuidades en la intersección de las fronteras topológicas de dos piezas  $B_i$  y  $B_j$  diferentes.

Las piezas  $B_i$  se llaman *trozos* o *piezas de contractividad* del mapa  $\rho$ .

### 4.3.2. Continuidad a trozos del mapa de Poincaré

Comenzaremos la demostración de que el mapa de Poincaré  $\rho : B \mapsto B$  es contractivo a trozos, contruyendo los candidatos  $B_i \subset B$  a piezas o trozos de contractividad de  $\rho$  en la sección de Poincaré  $B$ . En esta subsección, primero construiremos estas piezas  $B_i$ . Segundo, demostraremos que  $\rho$  es continua en cada una de estas piezas. En las próximas subsecciones probaremos que  $\rho$  es contractivo en cada una de sus piezas de continuidad, eligiendo una métrica adecuada.

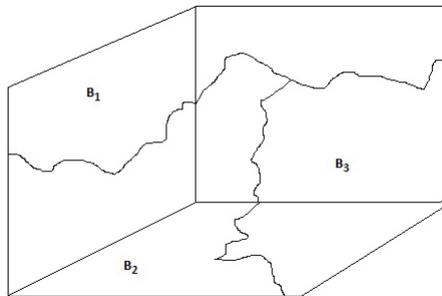


Figura 4.3: Ejemplo de  $m = 3$  neuronas. Parte en el primer octante de la sección de Poincaré  $B$ . Está formada por tres cuadrados bidimensionales  $[0, 1]^2$  en los planos coordenados de  $\mathbb{R}^3$ . Se dibuja la partición en las 3 piezas o trozos  $B_1, B_2$  y  $B_3$ , con respecto a las cuales el mapa de Poincaré será contractivo a trozos. Las curvas irregulares indican las fronteras de esas tres piezas de contractividad.

**Definición 4.3.3. (Piezas de continuidad)**

Para cada  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , llamamos  $i$ -ésima pieza de continuidad al siguiente conjunto

$$B_i := \left\{ V \in B : I(\bar{t}(V)) = \{i\} \right\}.$$

Dicho explícitamente,  $B_i$  es el conjunto de estados iniciales de la red neuronal que están en la sección de Poincaré  $B$  (ver Definición 4.2.6), y tales que para las órbitas con esas condiciones iniciales, la única neurona que llega al umbral y dispara en el primer instante  $\bar{t}(V)$  de disparo de la red, es la neurona  $i$ .

Se observa que en este caso la cantidad  $N$  de candidatos a piezas de continuidad es igual a la cantidad  $m$  de neuronas de la red. En la Figura 4.3 se esquematiza un ejemplo, en el caso de  $m = 3$  neuronas, de la partición de la sección de Poincaré  $B$  (que es bidimensional) en sus tres piezas  $B_1, B_2$  y  $B_3$ .

Veamos primero que las piezas  $\{B_i\}_{1 \leq i \leq m}$  construidas en la Definición 4.3.3 cumplen todas las condiciones requeridas en la Definición 4.3.2, para ser candidatas a piezas de contractividad:

Por un lado, de la Definición 4.3.3 es inmediato probar que  $B_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$ . En efecto, si  $i$  y  $j$  son neuronas diferentes, entonces  $\{i\} \neq \{j\}$ . Y por lo tanto las condiciones  $I(\bar{t}(V)) = \{i\}$  e  $I(\bar{t}(V)) = \{j\}$  no pueden cumplirse simultáneamente. Concluimos que un mismo estado inicial  $V$  no puede pertenecer a  $B_i \cap B_j$ , o lo que es lo mismo  $B_i \cap B_j = \emptyset$ . Además se cumple que  $B_i$  abierto con la topología inducida en  $B$  por su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ , y  $\bigcup_{i=1}^m B_i = B$ . (Omitiremos la demostración de estas dos últimas afirmaciones.)

**Lema 4.3.4. (Fórmula del mapa de Poincaré en cada pieza de continuidad)**

El mapa de Poincaré  $\rho : B \mapsto B$  es continuo en cada pieza  $B_i$ . Más aún, para todo  $i$ , la función  $\rho^{(i)} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  definida en todo el espacio  $\mathbb{R}^m$  por la igualdad (4.18) que escribimos más abajo, es una extensión continua a todo el espacio  $\mathbb{R}^m$  del mapa de Poincaré  $\rho$  restringido a  $B_i$ . Es decir:

$$\rho^{(i)}(U) = \rho(U) \quad \forall U \in B_i, \quad \text{donde}$$

$$\rho_j^{(i)}(V) := \max \left\{ \psi_j^{t_i(V)}(V_j) - h_{ij}, \quad -1 \right\} \quad \forall V \in \mathbb{R}^m. \quad (4.18)$$

Además  $\rho^{(i)}$  es diferenciable en todos los puntos  $V \in \mathbb{R}^m$  tales que

$$\rho_j^{(i)}(V) \neq -1$$

para todo  $1 \leq j \leq m$ .

**Nota:** En la igualdad (4.18):

- $\rho_j^{(i)}$  denota la componente  $j$ -ésima de  $\rho^{(i)}$ .
- $\psi_j$  denota la componente  $j$ -ésima del flujo solución de la ecuación diferencial (4.9) extendida a todo el espacio  $\mathbb{R}^m$  según el comentario 4.2.1 y la definición 4.2.2.
- $t_i(V_i) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  es la función implícita definida por la ecuación  $\psi_i^{t_i(V_i)}(V) = 1$ , según la igualdad (4.12).
- Si  $i \neq j$  entonces  $h_{ij}$  denota el valor absoluto del peso (negativo) de interacción sináptica de la neurona  $i$  hacia la  $j$ . Si  $i = j$ , entonces  $h_{ii}$  denota el valor absoluto del salto (negativo) desde el potencial de umbral  $\theta_i$  de la neurona  $i$  hasta su potencial de reset  $V_{\text{reset}}$ . Como estamos tomando una escala tal que  $\theta_i = 1$  y  $V_{\text{reset}} = 0$ , resulta, por convención  $h_{ii} = 1$ .

*Demostración del Lema 4.3.4:*

De la construcción de la pieza  $B_i$ , observamos que para  $U \in B_i$  se cumple

$$I(\bar{t}(V)) = \{i\} \quad \text{y} \quad \bar{t}(V) = t_i(V_i).$$

Usando estas igualdades, la notación  $h_{ii} = -1$  y las ecuaciones (4.16), (4.17) y (4.18), deducimos:

$$\rho(U) = \rho^{(i)}(U) \quad \forall U \in B_i.$$

Por lo tanto el mapa  $\rho^i : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  es una extensión de  $\rho : B \mapsto B$  a todo el espacio  $\mathbb{R}^m$ .

Para terminar de demostrar el Lema 4.3.4 basta probar entonces que  $\rho^{(i)}$  es continua en todo  $\mathbb{R}^m$  y diferenciable en todos los puntos  $V$  tales que  $\rho_j^{(i)} \neq -1$  para todo  $1 \leq j \leq m$ . Para ello, por la fórmula (4.18), basta demostrar que  $\psi^{t_i(V_i)}(V)$  es continua y diferenciable para todo  $V \in \mathbb{R}^m$ . Por un lado, la función  $t_i(V) : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  es continua y diferenciable. En efecto, es la función implícita definida por la ecuación  $\psi_i^{t_i(V)}(V) = -1$ , donde la solución  $\psi_i^t(V)$ , como función de dos variables independientes  $(t, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$  es de clase  $C^1$  por ser la solución con dato inicial  $\psi_i^0 = V_i$

de la ecuación diferencial  $dy/dt = \gamma_i(y)$  donde  $\gamma_i$  es de clase  $C^1$  (ver por ejemplo el Teorema 3, Sección 2, Capítulo VI de [39], pág. 215). Además la derivada parcial de  $\psi_i^t(V)$  con respecto de  $t$  es  $d\psi_i^t/dt = \gamma_i(\psi_i^t) \neq 0$  porque la función  $\gamma_i$  es positiva por hipótesis. Luego, existe, y es continua y diferenciable, la función implícita  $t_i(V_i)$ .

Por otro lado  $\psi^{t_i(V_i)}(V)$ , como función de  $V$ , es la composición de las siguientes tres funciones diferenciables:

- La proyección  $V = (V_1, V_2, \dots, V_i, \dots, V_m) \in \mathbb{R}^n \mapsto V_i \in \mathbb{R}$ .
- La función  $V_i \in \mathbb{R} \mapsto t_i(V_i) \in \mathbb{R}$  definida como función implícita por la ecuación (4.12). Ya vimos que existe y es diferenciable.
- La aplicación  $(t, V) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \mapsto \psi^t(V) \in \mathbb{R}^m$ . Esta aplicación es continua y diferenciable, como función de la pareja de sus dos variables independientes  $(t, V)$ , por ser solución de la ecuación diferencial  $dy/dt = \gamma(y)$  con dato inicial  $V$ , donde  $\gamma$  es un campo de clase  $C^1$  por hipótesis.

Siendo  $\psi^{t_i(V_i)}(V)$  la composición de tres funciones diferenciables, es diferenciable, como queríamos demostrar.  $\square$

### 4.3.3. Resultados intermedios

Como se dijo antes, el objetivo principal de este trabajo es probar que el mapa de Poincaré  $\rho$  es contractivo en cada pieza  $B_i$  construida en la Definición 4.3.3. Por lo tanto, debemos probar que  $\rho^{(i)} = \rho|_{B_i}$  es una transformación contractiva.

La principal herramienta que utilizaremos para ello es el Teorema del “Flujo Tubular” (ver por ejemplo el Teorema 8, Sección 4, Capítulo VI de [39], pág. 222) y su aplicación para construir una métrica adecuada en la sección de Poincaré  $B$ .

La causa de fondo por la cual el mapa de Poincaré resulta contractivo en cada trozo de continuidad es la propiedad de interacciones inhibitorias eficientes definida en 4.1.8, y su consecuencia demostrada en el Lema 4.2.5.

### Teorema 4.3.5. (del Flujo Tubular)

Sea la siguiente ecuación diferencial vectorial en  $\mathbb{R}^m$ :

$$\frac{d\vec{\psi}^t}{dt} = \gamma(\vec{\psi}^t)$$

con  $\gamma : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  de clase  $C^1$ . Sea  $\mathcal{U}$  un abierto conexo y acotado de  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\gamma$  no tiene ceros en  $\overline{\mathcal{U}}$ . Entonces existe un difeomorfismo de clase  $C^1$ ,  $\xi : \overline{\mathcal{U}} \rightarrow \xi(\overline{\mathcal{U}})$  de clase  $C^1$  tal que

$$\frac{d(\xi \circ \vec{\psi}^t)}{dt} = \vec{a} \text{ constante} \neq \vec{0} \quad \forall t \geq 0 \text{ tal que } \vec{\psi}^t \in \mathcal{U}. \quad (4.19)$$

*Demostración:* Ver por ejemplo el Teorema 8, Sección 4, Capítulo VI de [39], página 222.

**Interpretación del Teorema 4.3.5.**

Existe un cambio de variables  $\xi : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  diferenciable y con inversa diferenciable, tal que, al aplicarlo a la ecuación diferencial dada en el abierto acotado  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , la transforma en una ecuación diferencial de primer orden con segundo miembro constante igual al vector  $\vec{a}$ . Por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial obtenida después del cambio de variables, son de la forma  $t \cdot \vec{a} + \vec{c}$  con  $\vec{c}$  vector constante que depende del dato inicial. Más precisamente

$$\xi \circ \psi^0(V) = \xi(V), \quad \xi \circ \psi^t(V) = t \cdot \vec{a} + \xi(V). \quad (4.20)$$

Entonces las órbitas son rectas paralelas. Concluimos que el Teorema del flujo tubular establece la existencia de un cambio de variables diferenciable con inversa diferenciable que transforma las curvas solución (órbitas) de la ecuación diferencial dada en el abierto  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ , en segmentos de rectas paralelas. Ese cambio de variables  $\xi$  se dice que *plancha el flujo solución* de la ecuación dada (ver Figura 4.4).

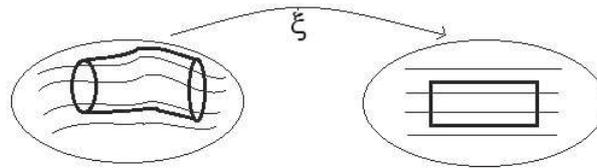


Figura 4.4: Teorema del Flujo Tubular.

Aplicaremos el cambio de variable  $\xi$  del Teorema 4.3.5 a las soluciones  $\psi$  de la ecuación diferencial vectorial (4.9) en el cubo  $Q = [-1, 1]^m$ . Este cambio de variables  $\xi$  deforma difeomorficamente el cubo  $Q$ , pero las órbitas se transforman en segmentos de rectas paralelas, según la

dirección  $\vec{a}$  constante. Además, como el segundo miembro de la ecuación diferencial (4.9) es de la forma

$$\vec{\gamma}(V) = \gamma_1(V_1), \gamma_2(V_2), \dots, \gamma_m(V_m),$$

donde  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ , obtenemos la siguiente propiedad:

**Lema 4.3.6. (Teorema del flujo tubular en red neuronal)**

Para la ecuación diferencial (4.9), existe un cambio de variables  $\xi$  en el cubo  $Q = [-1, 1]^m$  que verifica todas las propiedades del Teorema 4.3.5, y además:

- Si  $V = (V_1, V_2, \dots, V_m)$ , entonces

$$\xi(V) = \left( \xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m) \right).$$

- $\vec{a} = (1, 1, \dots, 1)$  es decir  $a_i = 1$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ .
- $\xi$  es de clase  $C^2$
- Las derivadas primeras  $\xi_j'$  son funciones reales estrictamente crecientes de variable real, para todo  $1 \leq i \leq m$  y cumplen

$$\xi_j'(V_j) = \frac{a_j}{\gamma_j(V_j)} \quad \forall V \in Q.$$

*Demostración:* Argumentamos primero con  $m = 1$  para la siguiente ecuación diferencial en la recta real  $\mathbb{R}$ :

$$\frac{d\psi_i^t}{dt} = \gamma_i(\psi_i^t) \quad t \in [-1, 1].$$

Aplicando el Teorema 4.3.5 y el Lema 4.3.6, existe un cambio de variables  $\xi_i : [-1, 1] \mapsto \xi_i([-1, 1])$ , que es un difeomorfismo, y tal que

$$\frac{d\left(\xi_i \circ \psi_i^t\right)}{dt} = a_i \neq 0 \text{ constante.}$$

Consideramos ahora el difeomorfismo  $\xi : Q \mapsto \xi(Q)$  definido por

$$\xi(V) := \left( \xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m) \right)$$

$$\forall V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \in Q = [-1, 1]^m.$$

Es inmediato chequear que  $\xi$  satisface las condiciones del Teorema 4.3.5 y del Lema 4.3.6 para la ecuación diferencial (4.9) en  $Q = [-1, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$ . Ahora veamos que  $\xi'_j = a_j/\gamma_j$  y que es estrictamente creciente. Sea  $-1 \leq V_j < W_j \leq 1$ . Tenemos:

$$\frac{d\xi_j \psi_j^t}{dt} = a_j \neq 0.$$

Luego, por la regla de la cadena:

$$\xi'_j \cdot \frac{\psi_j^t}{dt} = \xi'_j(V_j) \cdot \gamma_j(V_j) = a_j,$$

de donde

$$\xi'_j(V_j) = \frac{a_j}{\gamma_j(V_j)}$$

Entonces, como  $\gamma'_j < 0$ , sabemos que  $\gamma_j$  es estrictamente decreciente. Por lo tanto  $\xi'_j$  es estrictamente creciente como queríamos demostrar.

Además, como  $\xi'_j = a_j/\gamma_j$ , y  $\gamma_j$  es estrictamente positiva y de clase  $C^1$  deducimos que  $\xi'_j$  es de clase  $C^1$ . Por lo tanto,  $\xi_j$  es de clase  $C^2$  para todo  $j$ , lo cual implica que  $\xi$  es de clase  $C^2$ . Más aún  $\xi'_j$  nunca se anula porque  $a_j \neq 0$ .

Finalmente, consideramos la transformación lineal  $L$  con matriz asociada diagonal, tal que

$$L(V) = \left( \frac{V_1}{a_1}, \frac{V_2}{a_2}, \dots, \frac{V_m}{a_m} \right) \quad \forall V \in \mathbb{R}^m.$$

Definimos  $\tilde{\xi} = L \circ \xi$ . Es inmediato chequear que

$$\frac{d\tilde{\xi} \circ \vec{\psi}^t(V)}{dt} = (1, 1, \dots, 1).$$

Sustituyendo el difeomorfismo  $\xi$  por  $\tilde{\xi}$ , y el vector  $\vec{a}$  por  $(1, 1, \dots, 1)$  en la ecuación diferencial (4.19), obtenemos un cambio de variables que transforma la ecuación diferencial dada en  $Q \subset \mathbb{R}^m$ , en una con segundo miembro constante igual al vector  $(1, 1, \dots, 1)$  como queríamos demostrar. Esto termina de probar el Lema 4.3.6.  $\square$

**Definición 4.3.7. (Construcción de la métrica)**

Sea  $\xi$  un cambio de variables en el cubo  $Q = [-1, 1]^m$  que plancha el flujo, de acuerdo al Teorema 4.3.5 y que cumple además las condiciones del Lema 4.3.6. Sean dos puntos  $U, V$  en la sección de Poincaré  $B \subset Q$ . Definimos la *distancia* entre los puntos  $U$  y  $V \in B$ , del siguiente modo:

$$\text{dist}(U, V) := \left\| (\xi(U) - \xi(V)) \right\|,$$

donde  $\|\cdot\|$  es la norma del máximo valor absoluto de las componentes de los vectores en  $\mathbb{R}^m$ . Más precisamente

$$\|V\| := \max_{1 \leq i \leq m} |V_i| \quad \forall V = (V_1, V_2, \dots, V_m) \in \mathbb{R}^m.$$

**Lema 4.3.8. (Propiedades de la métrica)**

La distancia construida de acuerdo a la Definición 4.3.7, es una métrica en la sección de Poincaré  $B$  que induce la misma topología que la heredada en  $B$  por su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ .

*Demostración:* Como  $\xi$  es invertible y  $\xi(U) = \xi(V)$  si y solo si  $U = V$  en  $B$ . Usando esta propiedad y la métrica definida en  $\mathbb{R}^m$  por la norma usual, es inmediato chequear que la distancia definida en 4.3.7 cumple:

- a)  $\text{dist}(U, V) \geq 0$  y  $\text{dist}(U, V) = 0$  si y solo si  $U = V$ .
- b)  $\text{dist}(U, V) = \text{dist}(V, U)$  para todos  $U, V \in B$ .
- c) La propiedad triangular:  $\text{dist}(U, V) \leq \text{dist}(U, W) + \text{dist}(W, V)$  para todos  $U, V, W \in B$ .

Por lo tanto la función distancia definida en 4.3.7 es una métrica en  $B$ . Para probar que la topología inducida por la métrica  $\text{dist}$  en  $B$  es la misma que la topología heredada por  $B$  de su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ , basta observar que la métrica definida en  $\xi(B)$  es la heredada de la inclusión en  $\mathbb{R}^m$  porque está definida a partir de la norma usual, y además, como  $\xi^{-1}$  es un homeomorfismo (por ser difeomorfismo), conserva la topología de  $\mathbb{R}^m$ .  $\square$

**Lema 4.3.9. (Propiedad de convexidad)**

Para todos  $U, V \in B$ , el segmento de recta  $[\xi(U), \xi(V)]$  está contenido en  $\xi(\overline{Q})$ .

*Demostración:* Denotamos  $U' = \xi(U)$ ,  $V' = \xi(V)$ . El segmento  $[U', V']$  está parametrizado como  $W'(s) = U' + s(V' - U')$  con  $0 \leq s \leq 1$ . Entonces la componente  $i$ -ésima de  $W'(s)$  es

$$W'_i(s) = U'_i + s(V'_i - U'_i) = \xi_i(U_i) + s(\xi_i(V_i) - \xi_i(U_i)), \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Como  $\xi_i : [U_i, V_i] \subset \mathbb{R} \mapsto \xi([U_i, V_i]) \subset \mathbb{R}$  es un difeomorfismo, su imagen es un intervalo cerrado en  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto es convexo. Esto quiere decir que si dos puntos pertenecen al conjunto imagen  $\xi_i([U_i, V_i])$ , entonces cualquier combinación convexa de ellos también pertenece a esa imagen. El punto  $W'_i(s)$  es la combinación convexa siguiente:

$$W'_i(s) = \xi_i(U_i) + s(\xi_i(V_i) - \xi_i(U_i)) = (1-s)\xi_i(U_i) + s\xi_i(V_i), \quad \text{con } 0 \leq s \leq 1.$$

Es decir,  $W'_i(s)$  es combinación convexa de los dos puntos  $\xi_i(U_i), \xi_i(V_i) \in \xi_i([U_i, V_i])$ . Deducimos que  $W'_i(s)$  también pertenece a la imagen  $\xi_i([U_i, V_i])$ , y por lo tanto, existe  $W_i \in [U_i, V_i] \subset [-1, 1]$  tal que  $\xi_i(W_i) = W'_i(s)$ . Concluimos que, para todo punto  $W' \in [U', V']$  y para todo  $1 \leq i \leq m$ , existe  $W_i \in [-1, 1]$  tal que  $W'_i = \xi_i(W_i)$ . Por lo tanto  $W' = \xi(W) \in \xi(\overline{Q})$  como queríamos demostrar.  $\square$

**Teorema 4.3.10. (Fórmula de Liouville)**

Sea la  $\psi_i^t(V_i)$  la solución de la siguiente ecuación diferencial con dato inicial

$$\frac{dx}{dt} = \gamma_i(x), \quad \psi_i^0(V_i) = V_i,$$

donde  $\gamma_i$  es una función real de clase  $C^1$ . Entonces  $\psi_i^t(V_i)$  es de clase  $C^1$  respecto a la pareja  $(t, V_i)$  de sus dos variables independientes, y además

$$\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i} = \exp \int_0^t \gamma'_i(\psi_i^s(V_i)) ds. \quad (4.21)$$

*Demostración:* En primer lugar, es un teorema clásico de la Teoría de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, la propiedad de regularidad de solución de la ecuación diferencial: Si el segundo miembro  $\gamma_i$  de la ecuación diferencial es una función de clase  $C^1$ , entonces la solución  $\psi^t(V)$ , como función de la pareja  $(t, V)$  de variables independientes, es también función de clase  $C^1$  (ver por ejemplo Teorema 1, Sección 3, Capítulo VI de [39], pág. 38).

En segundo lugar, probaremos la llamada Fórmula de Liouville dada en la igualdad (4.21). Derivando ambos miembros de la ecuación diferencial dada respecto de  $V_i$ , y aplicando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\frac{d \left( \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dt} \right)}{dV_i} = \frac{d(\gamma_i(\psi_i^t(V_i)))}{dV_i} = \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)) \cdot \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}$$

Ahora, aplicamos el Lema de Schwarz, clásico en los cursos universitarios de cálculo, que permite el cambio de orden de derivación en el cálculo de las derivadas segundas iteradas. Obtenemos

$$\frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}\right)}{dt} = \frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dt}\right)}{dV_i}.$$

Reuniendo las igualdades anteriores, deducimos

$$\frac{d\left(\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}\right)}{dt} = \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)) \cdot \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}.$$

Ahora denotamos

$$\alpha(t) := \gamma'_i(\psi_i^t(V_i)),$$

y obtenemos entonces que la función  $y(t) := \frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i}$  es solución de la siguiente ecuación diferencial lineal de primer orden:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \alpha(t) \cdot y(t).$$

Por lo tanto

$$y(t) = \exp \int_0^t \alpha(s) ds,$$

o equivalentemente,

$$\frac{d\psi_i^t(V_i)}{dV_i} = \exp \int_0^t \gamma'_i(\psi_i^s(V_i)) ds.$$

□

**Lema 4.3.11. (Fórmula del primer instante de disparo)**

Sea  $t_i(V_i) > 0$  el primer instante de disparo espontáneo de la neurona  $i$  con estado inicial  $V_i$ , según la Definición 4.2.2. Entonces, la función  $t_i(V_i)$  es de clase  $C^1$  como función real de variable real  $V_i \in [-1, 1]$ , y su derivada es

$$t'_i(V_i) = \frac{-1}{\gamma_i(V_i)}.$$

*Demostración:* La función  $t_i(V_i)$  está dada por la ecuación implícita (4.12):

$$\psi^t(V_i) = 1 \Leftrightarrow t = t_i(V).$$

La función  $\psi^t(V_i)$  de dos variables  $(t, V_i)$  es de clase  $C^1$ , y además cumple las hipótesis del Teorema de función implícita, porque  $\partial\psi_i^t(W_i)/\partial W_i = \gamma(\psi_i^t(W_i)) \neq 0$ . Entonces  $t_i(W_i)$  existe y es de clase  $C^1$ .

Por la regla de la cadena, la derivada  $t'_i(V_i)$  verifica la siguiente ecuación:

$$\frac{d\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i)}{dV_i} = 0, \quad \text{por lo tanto}$$

$$\frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial t}\Big|_{t=t_i(V_i)} \cdot t'_i(V_i) + \frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i}\Big|_{t=t_i(V_i)} = 0.$$

Recordando que  $\psi_i^t$  es la  $i$ -ésima componente de la solución  $\vec{\psi}$  de la ecuación diferencial (4.9), y aplicando la Fórmula de Liouville para calcular  $\frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i}$  (ver Teorema 4.3.10), obtenemos:

$$\gamma_i(\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i)) \cdot t'_i(V_i) = -\frac{\partial\psi_i^t(V_i)}{\partial V_i}\Big|_{t=t_i(V_i)} = -\exp\left(\int_0^{t_i(V_i)} \gamma'_i(\phi^t(V_i)) dt\right).$$

Como  $\psi_i^{t_i(V_i)}(V_i) = 1$  deducimos:

$$\begin{aligned} t'_i(V_i) &= \frac{-\exp\left(\int_0^{t_i(V_i)} \gamma'_i(\phi^t(V_i)) dt\right)}{\gamma_i(1)} = \\ &= -\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp\left(\int_0^{t_i(V_i)} \frac{\gamma'_i(\psi_i^t(V_i))}{\gamma_i(\psi_i^t(V_i))} \cdot \gamma_i(\psi_i^t(V_i)) dt\right), \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable  $W_i(t) := \psi_i^t(V_i)$  con  $W_i(0) = V_i$ ,  $W_i(t_i(V_i)) = 1$ ,  $dW_i(t)/dt = d\psi_i^t(V_i)/dt = \gamma_i(\psi_i^t(V_i))$ , obtenemos:

$$t'_i(V_i) = -\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp\left(\int_{V_i}^1 \frac{\gamma'_i(W_i)}{\gamma_i(W_i)} dW_i\right) = -\frac{1}{\gamma_i(1)} \cdot \exp(\log(\gamma_i(1)) - \log \gamma_i(V_i)),$$

de donde concluimos

$$t'_i(V_i) = \frac{-1}{\gamma_i(V_i)},$$

como queríamos demostrar.  $\square$

#### 4.3.4. Contractividad a trozos del mapa de Poincaré

Estamos ahora en condiciones de demostrar el teorema principal de este trabajo:

##### **Teorema 4.3.12. (Contractividad a trozos del mapa de Poincaré)**

*Sea una red neuronal inhibitoria de grafo completo con  $m \geq 2$  neuronas y con interacciones sinápticas eficientes. Sea  $B \subset [-1, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$  la sección de Poincaré definida en 4.2.6. Entonces el mapa de primer retorno a  $B$ , o mapa de Poincaré  $\rho : B \mapsto B$ , es contractivo a trozos con respecto a una distancia que induce en  $B$  la topología heredada de su inclusión en  $\mathbb{R}^m$ .*

*Demostración:*

Probaremos que las piezas de contractividad de  $\rho$  son los conjuntos  $B_1, B_2, \dots, B_m$  construidos en la Definición 4.3.3. Teniendo en cuenta el Lema 4.3.4, basta probar que para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ , la aplicación  $\rho^{(i)} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$  es uniformemente contractiva cuando se la restringe al conjunto  $B_i$ , pues  $\rho^{(i)}|_{B_i} = \rho|_{B_i} : B_i \mapsto B$ .

Construimos el cambio variables  $\xi$  que plancha el flujo solución en el cubo  $Q$ , según Teorema 4.3.5, y que cumple además las condiciones del Lema 4.3.6. Consideramos la métrica  $\text{dist}$  construida en la Definición 4.3.7. Para demostrar el Teorema 4.3.12 basta encontrar una constante  $0 < \lambda < 1$  tal que:

$$\text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) \leq \lambda \text{dist}(U, V)$$

$$\forall U, V \in B_i \quad \forall 1 \leq i \leq m \quad (\text{A demostrar}) \quad (4.22)$$

Fijemos un valor de  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  tal que  $B_i \neq \emptyset$ . Aplicando el Lema 4.3.4 tenemos que:

$$\rho(V) = \rho^{(i)}(V) \quad \forall V \in B_i.$$

Fijamos dos puntos  $U, V \in B_i$  y denotamos

$$U' := \xi(U) = (\xi_1(U_1), \xi_2(U_2), \dots, \xi_m(U_m)),$$

$$V' := \xi(V) = (\xi_1(V_1), \xi_2(V_2), \dots, \xi_m(V_m)).$$

Calculamos ahora  $\text{dist}(\rho(U), \rho(V)) = \text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V))$  por medio de la siguiente integral, respecto de un parámetro  $s$ , de la función vectorial  $\rho^{(i)} \circ \xi^{-1}$  en el segmento  $[U', V'] = \{V' + s(U' - V') : 0 \leq s \leq 1\}$ . Obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) &= \text{dist}(\rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(U'), \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V')) = \\ &= \left\| \xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(U') - \xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V') \right\| = \\ &= \left\| \int_0^1 \frac{d\xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V' + s(U' - V'))}{ds} ds \right\| \leq \\ &= \int_0^1 \left\| \frac{d\xi \circ \rho^{(i)} \circ \xi^{-1}(V' + s(U' - V'))}{ds} \right\| ds = \\ &= \int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1}(U' - V') \right\| ds \leq \\ &= \int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| ds. \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio del cálculo integral, existe  $W' = V' + s(U' - V')$  para algún valor de  $s \in [0, 1]$  tal que:

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left\| d\xi \cdot d\rho^{(i)} \cdot d\xi^{-1} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| ds = \\ &= \left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\|, \end{aligned}$$

donde el punto  $W = \xi^{-1}(W') \in Q$  existe por la Afirmación A). Entonces obtenemos:

$$\text{dist}(\rho^{(i)}(U), \rho^{(i)}(V)) \leq \left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\|.$$

Como por la Definición 4.3.7  $\|\xi(U) - \xi(V)\| = \text{dist}(U, V)$ , para demostrar la afirmación (4.22), y con ello el Teorema 4.3.12, basta probar que existe una constante  $0 < \lambda < 1$  tal que:

$$\begin{aligned} &\left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| \leq \\ &\lambda \cdot \left\| \xi(U) - \xi(V) \right\| \quad (\text{A demostrar}) \quad (4.23) \end{aligned}$$

Usando las propiedades de  $\xi$  probadas en el Lema 4.3.6, demostraremos la afirmación (4.23) para cada coordenada  $j$ .

Fijemos  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Usamos la fórmula (4.18) del mapa  $\rho_j^{(i)}$ . En el caso en que  $\rho_j^{(i)}(U) \leq -1$  y  $\rho_j^{(i)}(V) \leq -1$ , se cumple

$$\text{dist}\left(\rho_j^{(i)}(U), \rho_j^{(i)}(V)\right) = 0,$$

y por lo tanto en este caso no hay nada que probar. En el caso  $\rho_j^{(i)}(U) > -1$ , no es restrictivo tomar el punto  $V$  tal que  $\rho_j^{(i)}(V) \geq -1$  y también  $W$  tal que  $\rho_j^{(i)}(W) \geq -1$ . Entonces,

$$\rho_j^{(i)}(W) = \psi_j^{(i)}(W) - h_{ij}, \quad d\rho_j^{(i)} = d\psi_j^{(i)},$$

donde usamos la notación siguiente

$$\psi_j^{(i)}(W) := \psi_j^{t_i(W_i)}(W_j) \quad \forall W \in Q. \quad (4.24)$$

Usando el Lema 4.3.6, observando que para funciones reales de una variable real  $d\xi_j = \xi'_j = 1/\gamma'_j$ , y multiplicando y dividiendo por

$$d\xi_j^{-1} \xi_j \circ \psi_j^{(i)}(W) = \left(d\xi_j \psi_j^{(i)}(W_j)\right)^{-1} = \gamma_j(\psi_j^{(i)}(W)),$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) &= \\ \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot d\xi_j \psi_j^{(i)}(W_j) \cdot d\psi_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) &= \\ \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot d(\xi_j \circ \psi_j^{(i)})_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Aplicando las igualdades (4.20) y (4.24), y recordando que por el Lema 4.3.6,  $a_j = 1$ , obtenemos:

$$\xi_j \circ \psi_j^{(i)}(W) = \xi_j \circ \psi^{t_i(W_i)}(W_j) = t_i(W_i) + \xi_j(W_j).$$

Por lo tanto,

$$d\left(\xi_j \circ \psi_j^{(i)}\right)_W \cdot (U - V) = t'_i(W_i)(U_i - V_i) + \xi'_j(W_j)(U_j - V_j).$$

Sustituyendo en (4.25) resulta:

$$\begin{aligned} d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) = \\ \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot H, \text{ donde} \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} H = t'_i(W_i) \cdot d\xi_i^{-1} \xi_i(W_i) \cdot (\xi(U_i) - \xi(V_i)) + \\ d\xi_j W_j \cdot d\xi_j^{-1} \xi_j(W) \cdot (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)) = \\ = t'_i(W_i) \cdot \gamma_i(W_i) \cdot (\xi(U_i) - \xi(V_i)) + (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Aplicando el Lema 4.3.11:  $t'_i(W_i) = \frac{-1}{\gamma_i(W_i)}$ . Sustituyendo en las igualdades (4.26) y (4.27):

$$\begin{aligned} d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) = \\ \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \cdot \left( (\xi(U_i) - \xi(V_i)) + (\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Finalmente tomando el valor absoluto en la igualdad (4.28) resulta:

$$\begin{aligned} \left| d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right| \leq \\ \left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right| \cdot \left( |\xi(U_i) - \xi(V_i)| + |\xi_j(U_j) - \xi_j(V_j)| \right). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Recordemos que por la Definición 4.3.7, la norma  $\|\cdot\|$  en  $\mathbb{R}^m$  que estamos empleando es la del máximo del valor absoluto de las componentes. Entonces, de la desigualdad (4.29) resulta

$$\left| d\xi_j \rho_j^{(i)}(W) \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1} \xi(W) \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right| \leq$$

$$\left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right| \cdot 2 \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|. \quad (4.30)$$

Sea

$$\lambda := 2 \cdot \max_{i,j} \left| \frac{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W_j))}{\gamma_j(\psi_j^{(i)}(W) - h_{ij})} \right|.$$

Por la desigualdad demostrada en el Lema 4.2.5, tenemos

$$0 < \lambda < 1.$$

Luego, sustituyendo en la desigualdad (4.30) concluimos que

$$\left| d\xi_{\rho_j^{(i)}(W)} \cdot d\rho_j^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right| \leq \lambda \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|.$$

Como la desigualdad anterior vale para todo  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ , tenemos una misma cota superior para el valor absoluto de todas las componentes. Luego:

$$\left\| d\xi_{\rho^{(i)}(W)} \cdot d\rho^{(i)}|_W \cdot d\xi^{-1}_{\xi(W)} \cdot (\xi(U) - \xi(V)) \right\| \leq \lambda \cdot \|\xi(U) - \xi(V)\|,$$

terminando de demostrar la afirmación (4.23) y el Teorema 4.3.12.  $\square$

## Capítulo 5

# Redes con interacciones fuertes de cualquier signo.

Mapa de Retorno de Redes de Neuronas de Tipo Integración y Disparo.

Propiedades de Contracción y Ciclos Límites.

Autor:

Pierre Guiraud<sup>1</sup>

*MSC 2010:* Principales: 37N25, 92B20; Secundarios: 34C15, 34D05

*Palabras clave:* ODE impulsivas, mapas contractivos a trozos, ciclos límite.

---

<sup>1</sup>Centro de Investigación y Modelamiento de Fenómenos Aleatorios - Valparaíso, Universidad de Valparaíso, Chile, Correo electrónico: pierre.guiraud@uv.cl

.

## Mapa de Retorno de Redes de Neuronas de Tipo Integración y Disparo. Propiedades de Contracción y Ciclos Límites.

Pierre Guiraud

### Resumen.

Estudiamos la dinámica global de redes neuronales de tipo integración y disparo compuestas de un número arbitrario de neuronas idénticas que interactúan mediante inhibición y excitación. El estudio se basa en el análisis de la dinámica equivalente de un mapa de retorno de Poincaré asociado al sistema. Se demuestra que para interacciones suficientemente fuertes este mapa es contractivo a trozos. El uso de esta propiedad de contracción a trozos, permite mostrar que existe una cantidad numerable de ciclos límites que atraen todas las órbitas estables del espacio de fases.

### Introducción

Osciladores con acoplamiento impulsivo aparecen con frecuencia en el modelado de redes neuronales [29]. En este contexto, el estado de cada oscilador describe la diferencia de potencial eléctrico entre el interior y el exterior de la membrana de una neurona. Un arquetipo de modelo de red neuronal con acoplamiento impulsivo aparece en la literatura [20, 25] bajo la forma siguiente:

$$\dot{V}_i = f_i(V_i) + \sum_{j=1}^n H_{ji}(V_i)\delta(t - t_j) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (5.1)$$

El término  $f_i(V_i)$  define la dinámica individual del potencial de membrana de la neurona  $i$ . El término involucrando la suma sobre los índices  $j$  modeliza el acoplamiento de la neurona  $i$  con las neuronas de la red. La siguiente regla adicional se asume: si el potencial  $V_j$  de una neurona  $j$  alcanza un umbral  $\theta > 0$  en un instante denotado  $t_j$ , entonces se dice que la neurona  $j$  dispara (o emite una espiga) y su potencial se resetea a cero. El término  $H_{ji}(V_i)\delta(t - t_j)$  es una notación corta que significa que en el momento  $t_j$  el potencial de la neurona  $i$  sufre un salto de discontinuidad de amplitud  $H_{ji}(V_i(t_j^-))$ . Esta discontinuidad modeliza la iteración de

la neurona  $j$  con la neurona  $i$  debido al disparo de  $j$  al tiempo  $t_j$ . Si el salto es negativo ( $H_{ji} < 0$ ) la interacción se dice inhibitoria y si es positivo ( $H_{ji} > 0$ ) se dice excitatoria.

Cuando se supone que las interacciones son débiles, es posible reducir (5.1), y también modelos neuronales más realistas, a un sistema canónico de osciladores acoplados en fase [23, 24]. Esto abre la posibilidad de estudiar en forma analítica la dinámica de una importante clase de redes neuronales débilmente acoplados mediante el estudio, por ejemplo, de la existencia y la estabilidad de estados sincronizados [16, 23, 25]. Sin embargo, un estudio más exhaustivo puede obtenerse con modelos un poco más específicos. Dentro de esta clase los modelos de tipo *Integración y Disparo* (ID) son sin duda los más populares. Estos se rigen por la ecuación (5.1) donde  $f_i$  es una función afín. Aunque se hayan obtenido resultados importantes sobre la fenomenología de las redes neuronales de tipo ID, la mayoría de estos conciernen a soluciones particulares, y existen pocos resultados matemáticos describiendo la totalidad de las soluciones (lo que llamamos a continuación *dinámica global*).

El propósito de este trabajo es, precisamente, dar una descripción matemática, desarrollando pruebas analíticas, de la dinámica global de las redes neuronales de tipo ID. A pesar de ser sistemas dinámicos a tiempo continuo, estudios previos de la dinámica global de redes de tipo ID usan métodos de sistemas dinámicos de tiempo discreto. Por ejemplo, en el trabajo seminal [31] se usa un mapa de Poincaré para demostrar que, en redes neuronales de tipo ID con interacciones constantes homogéneas y excitatorias ( $H_{ji} = \text{cte} > 0$ ) y dinámicas individuales homogéneas ( $f_i = f$ ), la red termina sincronizada para casi todo estado inicial. En [11] se considera directamente un modelo a tiempo discreto, que puede ser visto como una discretización de (5.1) por un esquema de Euler. El sistema dinámico correspondiente se define por las iteraciones de un mapa afín a trozos. Se demuestra que para valores genéricos de los parámetros, la dinámica asintótica consiste en un número finito de órbitas periódicas estables. También se muestra que para valores no genéricos de los parámetros, la dinámica asintótica es sensible a las condiciones iniciales.

Motivados por los resultados rigurosos de [11], que se probaron para un sistema de tiempo discreto, la pregunta que abordamos en este trabajo es si estos resultados siguen ciertos para redes neuronales de tipo ID (a tiempo continuo). Aunque esquemas de integración sofisticados, especialmente diseñados para la simulación de redes neuronales, han sido

desarrollados [4], no hay ninguna manera de eliminar completamente los errores numéricos. Por lo tanto, los resultados de simulaciones pueden depender drásticamente de la estrategia de integración utilizada [38]. Esto motiva el desarrollo de pruebas matemáticas rigurosas en el caso de tiempo continuo, como por ejemplo en [5, 10, 27] donde se demostró que órbitas periódicas atraen a casi todas las condiciones iniciales, si todas las interacciones son inhibitorias.

En la sección 5.1 de este capítulo, mostraremos cómo se obtiene el mapa de Poincaré de retorno de (5.1), suponiendo  $f_i(V_i) = -\gamma V_i + K$ , la independencia de  $H_{ji}$  en  $V_i$ , y otras hipótesis ((H1) y (H2)), que dan un significado preciso a (5.1). En la sección 5.2, encontramos un abierto en el espacio de los parámetros tales que este mapa de retorno tiene la propiedad de ser contractivo a trozos en todo el espacio de fases. Estos parámetros se definen por las hipótesis (H3) y (H4) (ver sección 5.2) que suponen las interacciones suficientemente fuertes, o que la constante  $K$  (que es proporcional a una corriente externa) no sea muy grande. Bajo estas hipótesis mostraremos que, al igual que en [11], la dinámica asintótica estable de la red se compone de un número numerable (en general finito) de órbitas periódicas. Sin embargo, esto no impide que el sistema pueda exhibir una forma débil de caos, debido a la coexistencia de estados sensibles. La distancia entre los ciclos límite (que atraen la dinámicas estables) y los puntos sensibles, determina los efectos de pequeñas perturbaciones (errores de redondeo, perturbaciones estocásticas). Los efectos posibles son la existencia de tiempos transitorios largos y de ciclos de largo período, dependiendo de qué tan intrincados sean los puntos sensibles y los puntos estables.

## 5.1. Redes neuronal de tipo ID y mapa de retorno de Poincaré

Proponemos estudiar la dinámica global de redes neuronales de tipo ID que contemplan un número arbitrario de neuronas conectadas por sinapsis inhibitorias y excitatorias. Este sistema, que se define con precisión en la subsección 5.1.1, es el modelo (5.1) con  $f_i(V_i) = -\gamma V_i + K$  y donde  $H_{ji}(V_i) = H_{ji}$  es independiente de  $V_i$ . Sus propiedades y dinámica global se estudian en las secciones siguientes a través de un mapa de Poincaré que se deriva en la subsección 5.1.2.

### 5.1.1. Definición del modelo

En cada momento  $t \in \mathbb{R}$ , el estado de una neurona  $i \in I := \{1, \dots, n\}$  se describe por su potencial de membrana  $V_i(t)$  y el estado de la red completa está representado por el vector  $\mathbf{V}(t) = (V_1(t), \dots, V_n(t))$ . En los modelos de integración y disparo, la evolución temporal de la red tiene dos regímenes: un régimen *sub-umbral* y un régimen de *disparo*.

**Ecuaciones del régimen sub-umbral:** El régimen sub-umbral se produce cuando  $V_i(t) < \theta$  para todos  $i \in I$ , donde  $\theta > 0$  se llama el potencial umbral. En tal régimen, el estado de la red satisface el sistema de ecuaciones diferenciales definido por:

$$\dot{V}_i(t) = -\gamma V_i(t) + K \quad \forall i \in I. \quad (5.2)$$

La constante  $\gamma > 0$  es igual a  $1/RC$  donde  $R$  y  $C$  son, respectivamente, la resistencia y la capacidad de la membrana neuronal. La constante  $K = I_{ext}/C > 0$  es proporcional a una corriente  $I_{ext}$  externa constante. Según la ecuación (5.2), el potencial de cada neurona tiende al valor de equilibrio:

$$\beta := \frac{K}{\gamma} = RI_{ext} > 0. \quad (5.3)$$

**Ecuaciones del régimen de disparo:** Si asumimos  $\beta > \theta$ , y tomamos un estado inicial  $\mathbf{V}(0)$  tal que  $V_i(0) < \theta$  para todos  $i$  en  $I$ , entonces existe un menor tiempo  $t_0 > 0$  (que depende de  $\mathbf{V}(0)$ ) para el cual el potencial de (al menos) una neurona alcanza el umbral. En este instante la red entra en el régimen de disparo: la(s) neurona(s) que alcanza(n) el umbral al tiempo  $t_0$  emite(n) un espiga que induce un salto en el potencial de todas las neuronas que están conectadas con ella(s), y el propio potencial de la(s) neurona(s) que emite(n) la espiga se restablece a un valor menor que el umbral, elegido igual a 0 (sin pérdida de generalidad, y como convención para los modelos de integración y disparo). Por lo tanto, cuando la red entra en el régimen de disparo, su estado sufre una discontinuidad debido a la re-inicialización del potencial de las neuronas que disparan, y al cambio de potencial de las neuronas que reciben las espigas. Formalmente, si  $J \subset I$  denota el conjunto de *todas* las neuronas que alcanzan  $\theta$  en el tiempo  $t_0$ , es decir, de forma espontánea (por el flujo solución de la ecuación (5.2)), o por una excitación producida por otras neuronas, el estado de la red satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow t_0} V_i(t) &= 0 \quad \text{si } i \in J \quad \text{y} \\ \lim_{t \downarrow t_0} V_i(t) &= \lim_{t \uparrow t_0} V_i(t) + \sum_{j \in J} H_{ji} \quad \text{si } i \notin J. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La constante  $H_{ji}$  representa el salto en el potencial de la neurona  $i$  provocado por la espiga emitida por la neurona  $j$  hacia la neurona  $i$ . Es positiva para una sinápsis excitatoria, negativa para una sinápsis inhibitoria, e igual a 0 si las neuronas no están conectadas. Debido al carácter instantáneo de las interacciones sinápticas, en presencia de neuronas excitatorias, la dinámica de los modelos de ID de tipo (5.1) podría resultar mal definida, o exhibir tasas de disparo infinitas, cuando la red tiene ciclos, a menos que se considere una especie de período refractario. Para asegurar que el modelo esté bien definido para cualquier red, suponemos que una neurona que dispara en el momento  $t_0$  no puede ni recibir ni emitir una segunda espiga en el momento  $t_0$  (lado derecho de (5.4)). En este sentido se considera un fenómeno refractario, el cual, así como las interacciones sinápticas, es instantáneo. El conjunto  $J$  de las neuronas que disparan en el momento  $t_0$  tiene que ser definido y calculado cuidadosamente para tener en cuenta el fenómeno refractario. En la sección 5.1.2, escribimos la definición matemática exacta de este conjunto (fórmulas (5.10) y (5.11)).

**Definición 5.1.1.** Diremos que una neurona  $j$  es excitatoria (inhibitoria) si todas sus sinapsis son excitatorias (inhibitorias); es decir,  $H_{ji} \geq 0$  ( $H_{ji} \leq 0$ ) para todo  $i \in I$  tal que  $j \neq i$ .

Los resultados presentados aquí suponen las siguientes hipótesis:

**(H1)** El potencial de membrana de las neuronas está acotado inferiormente, es decir, existe  $\alpha < 0$  tal que para todo  $i \in I$  y  $t \in \mathbb{R}$ , tenemos  $V_i(t) \geq \alpha$ .

**(H2)** Si una neurona  $i$  sufre interacciones inhibitorias y excitatorias al mismo tiempo, y si la suma de las interacciones excitatorias es lo suficientemente grande para que ella alcance el potencial de umbral, entonces la neurona  $i$  dispara.

La hipótesis (H1) se ajusta a los límites físicos del potencial eléctricos de un sistema biológico: el potencial de una neurona no puede ser arbitrariamente pequeño. No especificamos ningún valor particular negativo

para  $\alpha$ . Es un parámetro del modelo que puede cambiar resultados cuantitativos, pero tiene poco impacto sobre la dinámica cualitativa de la red.

La hipótesis (H2) es técnica. Resuelve una indeterminación que aparece de todos modos en cualquier red con interacciones instantáneas. Tiene una interpretación biológica, como lo explicamos ahora. En un modelo en el cual las interacciones no son instantáneas, durante un corto intervalo de tiempo  $\tau$  cuando la neurona está interactuando, se añaden pesos sinápticos de distinto signo al potencial de las neuronas post-sinápticas. Si la suma de los pesos excitatorios es mayor que el umbral, pero la suma total de los pesos sinápticos es menor que el umbral, en el intervalo de tiempo  $\tau$ , las dos situaciones siguientes podrían surgir:

1) Las señales excitatorias son las primeras en llegar a una neurona  $i$ , y su suma es lo suficientemente grande para que ésta dispare. Luego, la neurona  $i$  dispara y además, debido al período refractario, la suma de las señales inhibitorias que llegan atrasadas a la neurona  $i$  no cambian su potencial:  $V_i \simeq 0$ .

2) Las mismas señales excitatorias e inhibitorias del caso 1), llegan a neurona  $i$ , pero en el orden inverso. Entonces  $V_i$  inicialmente disminuye y cuando las señales excitatorias llegan atrasadas a la neurona  $i$ , estas no son suficientes para hacer que la neurona  $i$  dispare.

Cuando las interacciones son instantáneas, es posible que las señales excitatorias e inhibitorias lleguen a la neurona  $i$  al mismo tiempo, ya que el intervalo de tiempo  $\tau$  durante el cual las neuronas están interactuando se colapsa a cero. La hipótesis (H2) es un criterio que asume que las interacciones positivas actúan más rápido que las negativas cuando existe una indeterminación. También puede ser vista como una manera de tener en cuenta que las sinapsis excitatorias son más frecuentes que las sinapsis inhibitorias en ciertas parte del sistema nervioso [30].

### 5.1.2. El mapa de retorno de Poincaré

Con el fin de analizar la dinámica global de la red, la reducimos a un sistema dinámico equivalente de tiempo discreto. Precisamente, construimos un mapa de retorno de Poincaré. En esta sección se introducen las principales herramientas y notaciones que usaremos de ahora en adelante.

**La sección de Poincaré  $\Sigma$ :** Dado que el potencial de una neurona

es siempre mayor que  $\alpha$  y siempre menor que  $\theta$ , los estados de la red siempre pertenecen al espacio  $Q = [\alpha, \theta]^n$ . Por definición del modelo, la red no deja de emitir espigas (dado que  $\beta > \theta$ ). Existen entonces tiempos arbitrariamente grandes tales que el potencial de una neurona se repone a cero. En otras palabras, cualquier solución del modelo vuelve a visitar un número infinito de veces al conjunto:

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^n \hat{\Sigma}_j \quad \text{donde} \quad \hat{\Sigma}_j = \{\mathbf{V} \in Q : V_j = 0\}. \quad (5.5)$$

El conjunto  $\Sigma \subset Q$  es la sección de Poincaré que vamos a considerar.

Para resumir las principales etapas de la construcción del mapa de retorno, sigamos una órbita de la red. Supongamos que el estado inicial de la red es  $\mathbf{V} \in \Sigma$ . Si  $\mathbf{V}$  es tal que  $V_i < \theta$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ , entonces la red está en el régimen sub-umbral y existe un tiempo de espera  $\bar{t}(\mathbf{V}) > 0$  antes de que una neurona alcance el potencial de umbral. En el instante  $\bar{t}(\mathbf{V})$  la red entra en el régimen de la disparo, y un conjunto  $J(\mathbf{V})$  de neuronas emiten espigas. El potencial de estas neuronas luego se restablece a 0, y el estado de las otras neuronas que no emiten espigas durante el régimen de disparo, se actualiza de acuerdo con las interacciones recibidas. La red está de vuelta en el régimen sub-umbral en un punto de  $\Sigma$  que depende del estado inicial  $\mathbf{V}$  y que denotamos  $\rho(\mathbf{V})$ . El mapa  $\rho : \Sigma \rightarrow \Sigma$ , que a cada punto de  $\mathbf{V} \in \Sigma$  asocia el punto  $\rho(\mathbf{V})$  correspondiente, se llama el mapa de retorno de la red en  $\Sigma$ . Ahora detallamos el cálculo de  $\bar{t}(\mathbf{V})$ ,  $J(\mathbf{V})$  y de  $\rho$ .

**Tiempo de espera  $\bar{t}(\mathbf{V})$ :** Al resolver el sistema (5.2) obtenemos que el flujo  $\phi^t = (\phi_1^t, \dots, \phi_n^t)$  del sistema satisface

$$\phi_i^t(\mathbf{V}) = (V_i - \beta)e^{-\gamma t} + \beta, \quad (5.6)$$

para todo  $i \in I$ ,  $t \in \mathbb{R}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^n$ . Así, si en el momento  $t = 0$  la red está en el estado  $\mathbf{V} \in \Sigma$ , esta entra en el régimen de disparo en el momento:

$$\bar{t}(\mathbf{V}) := \min_{i \in \{1, \dots, n\}} t_i(\mathbf{V}) \quad \text{donde} \quad t_i(\mathbf{V}) := \inf\{t \geq 0 : \phi_i^t(\mathbf{V}) \geq \theta\}. \quad (5.7)$$

Notemos que  $\bar{t}(\mathbf{V})$  es el valor de  $t_0$  de la fórmula (5.4) cuando el estado inicial de la red es  $\mathbf{V}$ . En el caso particular cuando  $\mathbf{V} \in \Sigma$  es tal que  $V_i = \theta$  para algún  $i$ , el tiempo de espera es igual a 0. En caso contrario

es positivo. Notemos también que si  $\bar{t}(\mathbf{V}) = t_i(\mathbf{V})$ , la expresión de  $\phi^t(\mathbf{V})$  al tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$  está dada por

$$\phi_i^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \theta \quad \text{y} \quad \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \beta - \frac{(\beta - V_k)(\beta - \theta)}{(\beta - V_i)} \quad \forall k \neq i. \quad (5.8)$$

Usaremos frecuentemente esta última expresión.

**Régimen de disparo y tiempo de disparo  $t = \bar{t}(\mathbf{V})$ :** Por definición (5.7), en el momento  $\bar{t}(\mathbf{V})$  existen componentes del vector  $\phi^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V})$  que son iguales a  $\theta$ : las que corresponden a las neuronas cuyos potenciales alcanzan el umbral en un tiempo menor que el potencial de todas las otras neuronas. Necesitamos caracterizar este conjunto de neuronas que disparan *espontáneamente*, dado que son parte del conjunto de  $J$  de la fórmula (5.4). Es por eso que introducimos el siguiente cubrimiento de  $\Sigma$ :

$$\Sigma = \bigcup_{i=1}^n \Sigma_i \quad \text{donde} \quad \Sigma_i = \{\mathbf{V} \in \Sigma : \bar{t}(\mathbf{V}) = t_i(\mathbf{V})\}. \quad (5.9)$$

Un conjunto  $\Sigma_i$  es el conjunto de los estados inicial en  $\Sigma$  tales que la neurona  $i$  dispara espontáneamente después del tiempo de espera  $\bar{t}(\mathbf{V})$ . Es decir, si  $\mathbf{V} \in \Sigma_i$  entonces  $\phi_i^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \theta$ . Como varias neuronas pueden llegar al potencial  $\theta$  al mismo tiempo, los conjuntos de este cubrimiento no son disjuntos dos a dos, pero sus interiores lo son. De todo modo podemos afirmar que las neuronas que disparan en forma espontánea al tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$  son las del conjunto:

$$J_0(\mathbf{V}) = \{i \in I : \mathbf{V} \in \Sigma_i\}.$$

Ahora, el disparo de las neuronas de  $J_0(\mathbf{V})$  puede excitar instantáneamente otras neuronas, que también pueden disparar a su vez en el mismo instante, y excitar otras neuronas o no. Una vez más, tenemos que caracterizar todas las neuronas que participan en este proceso de *avalancha* instantánea, es decir, el conjunto  $J$  de fórmula (5.4), que denotamos de ahora en adelante  $J(\mathbf{V})$ . Podemos determinar  $J(\mathbf{V})$  introduciendo una secuencia recursiva de conjuntos de índices  $\{J_m(\mathbf{V})\}_{m \geq 0}$ , donde cada  $J_m(\mathbf{V})$  es el conjunto de neuronas que han disparado una vez hasta el paso  $m$  del proceso de avalancha. Teniendo en cuenta la inercia temporal (el período refractario) de las neuronas reales, y teniendo en cuenta

la hipótesis (H2), esta secuencia debe obedecer la regla de inducción siguiente para todos  $m \geq 1$ :

$$J_m(\mathbf{V}) = J_{m-1}(\mathbf{V}) \cup \{k \in I \setminus J_{m-1}(\mathbf{V}) : \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{i \in J_{m-1}(\mathbf{V}) : H_{ik} > 0} H_{ik} \geq \theta\}. \quad (5.10)$$

Por ejemplo,  $J_1(\mathbf{V})$  contiene las neuronas de  $J_0(\mathbf{V})$  y las neuronas adicionales que disparan debido a algunas interacciones excitatorias con las neuronas de  $J_0(\mathbf{V})$ . En nuestra definición (5.10), no se consideran como posibles receptores de espigas neuronas que hayan disparado en un paso anterior, con el fin de tener en cuenta de un *fenómeno refractario* en el modelo. De hecho, un conjunto  $J_m(\mathbf{V})$  es la unión de las neuronas de  $J_{m-1}(\mathbf{V})$  con *nuevas neuronas* que disparan por culpa de las neuronas de  $J_{m-1}(\mathbf{V})$ .

Ya que el conjunto  $I$  es finito, existe un  $m_0 \geq 0$ , tal que  $J_{m_0+1}(\mathbf{V}) = J_{m_0}(\mathbf{V})$ , ya sea porque  $J_{m_0-1}(\mathbf{V})$  es el conjunto  $I$ , o porque la suma de las interacciones de las neuronas excitatorias de  $J_{m_0-1}(\mathbf{V})$  no es suficiente para hacer disparar algunas nuevas neuronas. Concluimos que *el conjunto de las neuronas que emiten un espiga en el tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$*  se puede escribir como:

$$J(\mathbf{V}) = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} J_m(\mathbf{V}) = J_{m_0}(\mathbf{V}). \quad (5.11)$$

Si no hay neuronas excitatorias en  $J_0(\mathbf{V})$ , entonces  $J_m(\mathbf{V}) = J_0(\mathbf{V})$  para todos  $m \in \mathbb{N}$  y  $J(\mathbf{V}) = J_0(\mathbf{V})$ . Si  $J_0(\mathbf{V})$  contiene neuronas excitatorias, entonces  $J(\mathbf{V})$  puede contener más neuronas que  $J_0(\mathbf{V})$ .

**Partición  $\mathcal{P}$  de  $\Sigma$ :** Como lo muestra la construcción anterior, a cada estado inicial de la red  $\mathbf{V} \in \Sigma$  se le asocia el conjunto  $J(\mathbf{V})$  de las neuronas que disparan en el tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$ . Por lo que podemos considerar la función  $J(\cdot)$  de  $\Sigma$  en el conjunto  $P(I)$  de todos los subconjuntos no vacíos de  $I$  y utilizar sus pre-imágenes para conseguir una partición  $\mathcal{P}$  de  $\Sigma$ :

$$\mathcal{P} = \{\Sigma_J\}_{J \in P(I)} \quad \text{donde} \quad \Sigma_J = \{\mathbf{V} \in \Sigma : J(\mathbf{V}) = J\}. \quad (5.12)$$

Dado un conjunto de neuronas  $J \in P(I)$ , el conjunto  $\Sigma_J$  es el conjunto de todos los estados inicial en  $\Sigma$  tal que las neuronas que disparan al tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$  son exactamente las de  $J$ . Por ejemplo, si  $\mathbf{V} \in \Sigma_{\{i\}}$ , entonces en el tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$ , sólo la neurona  $i$  dispara. Es sencillo comprobar que  $\mathcal{P}$  forma una partición de  $\Sigma$ .

Ahora podemos dar la fórmula del mapa de retorno en  $\Sigma$ :

**Proposición 5.1.2.** *Bajo las hipótesis (H1) y (H2), el mapa  $\rho : \Sigma \rightarrow \Sigma$  cuyas componentes  $\rho_1 \dots, \rho_n$  se definen en cada átomo de  $\Sigma_J$  de la partición  $\mathcal{P}$  de  $\Sigma$  por:*

$$\rho_i(\mathbf{V}) = 0 \quad \text{si } i \in J \quad \text{y} \quad \rho_i(\mathbf{V}) = \max\{\alpha, \phi_i^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J} H_{ji}\} \quad \text{si } i \notin J \quad (5.13)$$

es un mapa de retorno en  $\Sigma$  del modelo.

*Demostración:* Sean  $\mathbf{V} \in \Sigma$  y  $J \in P(I)$  tales que  $\mathbf{V} \in \Sigma_J$ . De (5.6) y (5.7) se deduce que la órbita de  $\mathbf{V}$  satisface:

$$\mathbf{V}(t) = \phi^t(\mathbf{V}) \quad \forall t \in [0, \bar{t}(\mathbf{V})) \quad \text{y} \quad \lim_{t \uparrow \bar{t}(\mathbf{V})} \mathbf{V}(t) = \phi^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}). \quad (5.14)$$

En el tiempo  $\bar{t}(\mathbf{V})$  la red entra en el régimen de disparo y las neuronas que disparan son las de  $J$ , ya que  $\mathbf{V} \in \Sigma_J$ . Según (5.4), el potencial de las neuronas de  $J$  se restablece a 0 y el potencial de las otras neuronas sufre interacciones excitatorias e inhibitorias por parte de las neuronas de  $J$ . Junto con la hipótesis (H1) esto implica:

$$\lim_{t \downarrow \bar{t}(\mathbf{V})} V_i(t) = 0 \quad \text{si } i \in J \quad \text{y}$$

$$\lim_{t \downarrow \bar{t}(\mathbf{V})} V_i(t) = \max\{\alpha, \phi_i^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J} H_{ji}\} \quad \text{si } i \notin J.$$

Por lo tanto,  $\rho(\mathbf{V}) := \lim_{t \downarrow \bar{t}(\mathbf{V})} \mathbf{V}(t)$  es un punto de  $\Sigma$ , que es el nuevo estado de la red cuando vuelve al régimen de sub-umbral.  $\square$

Un órbitas  $\{\rho^n(\mathbf{V})\}_{n \in \mathbb{N}}$  del mapa retorno da los estados de la red inmediatamente después de la emisión de un espiga (o grupo simultáneo de espigas). Sin embargo, la totalidad de la órbita de la red puede ser reconstruida utilizando (5.14), y todas las propiedades de la red se pueden deducir de las del mapa de retorno. En particular, la red tiene una órbita periódica si y sólo si el mapa de retorno también tiene.

El mapa de retorno no satisface hipótesis estándar de la teoría de los sistemas dinámicos, como la diferenciabilidad, o la continuidad en todo su dominio. En realidad,  $\rho$  es continua en el interior de cada conjunto  $\Sigma_J$  de la partición  $\mathcal{P}$ , pero no necesariamente en todo  $\Sigma$ . En un punto  $\mathbf{V}$  en la frontera  $\partial \Sigma_J$  de un conjunto  $\Sigma_J$ , genéricamente el mapa de retorno

no es continuo, ya que una pequeña perturbación puede pertenecer al interior de otro conjunto  $\Sigma_{j'}$ . Así, tal perturbación cambia el conjunto de las neuronas disparando lo que modifica drásticamente el valor de  $\rho$ . En general, no es trivial caracterizar los átomos de  $\mathcal{P}$ , debido a que dependen en gran medida de las interacciones. Sin embargo, si una red es completamente inhibitoria, cuando una neurona dispara, lo hace de manera espontánea. Esto simplifica el cálculo de  $\mathcal{P}$ , ya que permite reemplazar  $J(\mathbf{V})$  por  $J_0(\mathbf{V})$  en la definición (5.12). Este último conjunto no depende de las interacciones, pero sólo de las características del régimen sub-umbral. Usaremos esta propiedad para caracterizar los conjuntos  $\Sigma_J$  asociados a ciertas redes que introduciremos más adelante.

## 5.2. Propiedades de contracción del mapa de retorno

En ciertos estudios matemáticos de la dinámica global de redes neuronales de tipo ID, el modelo considerado tiene la propiedad de ser *contractivo a trozos* en *todo* el espacio de fases. Esta propiedad refleja la presencia de disipación en las redes. Se introduce en el modelo con ese objetivo [11], o es una consecuencia de la ausencia de interacciones excitatorias [5, 10] o del predominio de las interacciones inhibitorias [27]. En nuestro caso, donde ninguna de estas hipótesis se admite, la propiedad de contracción no se cumple en todo en el espacio para todos los parámetros del sistema. Sin embargo, vamos a mostrar que siempre existe una subregión del espacio de fases donde el mapa de retorno es contractivo a trozos y que para una región de parámetros que corresponde a corriente externa  $I_{ext}$  pequeña con respecto a las interacciones esta subregión es grande y atrae toda condiciones inicial.

**Definición 5.2.1.** (*Mapa contractivo a trozos*) Sea  $(X, d)$  un espacio métrico compacto. Una aplicación  $f : X \rightarrow X$  se dice *contractiva a trozos* si existe una familia finita  $X_1, X_2, \dots, X_p$  de conjuntos abiertos tales que

$$1) \quad X = \bigcup_{i=0}^p \overline{X}_i \text{ y } X_i \cap X_j = \emptyset \text{ para todo } i \neq j.$$

2) Existe una constante  $\lambda < 1$  tal que para todo  $i \in \{0, 1, \dots, p\}$  se tiene que

$$d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y) \quad \forall x, y \in X_i.$$

En lo que sigue vamos a mostrar que bajo algunas hipótesis sobre las características de la red el mapa de retorno es contractivo a trozo.

### 5.2.1. Existencia de una zona contractiva

Empezamos por mostrar que existen subconjuntos de  $\Sigma$  para los cuales es posible que se cumpla la condición 2) de la Definición 5.2.1. De ahora en adelante  $\|\cdot\|$  designa la norma del máximo de  $\mathbb{R}^n$ .

**Proposición 5.2.2.** *Para todo  $c \in [0, \theta]$ , sea  $\mathcal{C}_c$  el subconjunto de  $\Sigma$  definido por*

$$\mathcal{C}_c := \{\mathbf{V} \in \Sigma : \alpha \leq V_i \leq c \forall i \in I\} \quad (5.15)$$

y supongamos que

$$\theta < \beta < \beta_+(\alpha) \quad \text{con} \quad \beta_+(\alpha) := \frac{1}{2}(\alpha + 2\theta + \sqrt{\alpha^2 + 4\theta^2}).$$

Entonces, para todo  $c \in (0, \bar{c})$ , donde

$$\bar{c} := \beta - \frac{1}{2} \left( \beta - \theta + \sqrt{(\beta - \theta)^2 + 4(\beta - \theta)(\beta - \alpha)} \right), \quad (5.16)$$

el conjunto  $\mathcal{C}_c$  no es vacío, y para todo  $J \in P(I)$  se tiene que

$$\|\rho(\mathbf{V}) - \rho(\mathbf{W})\| \leq \lambda_c \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\| \quad \forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \Sigma_J \cap \mathcal{C}_c,$$

donde  $\lambda_c < 1$ .

*Demostración:* Primero  $\mathcal{C}_c \neq \emptyset$  si y sólo si  $c \geq 0$ , ya que cualquier punto de  $\Sigma$  tiene al menos una componente igual a 0. Para que un conjunto  $\mathcal{C}_c$  con  $0 < c < \bar{c}$  no este vacío tenemos que asegurar que  $\bar{c} > 0$ . Esta última condición se cumple si y sólo si

$$2\beta - (\beta - \theta) > \sqrt{(\beta - \theta)^2 + 4(\beta - \theta)(\beta - \alpha)}.$$

Como ambos lados de la desigualdad son positivos, elevando al cuadrado obtenemos una expresión equivalente, que después de simplificaciones es:

$$\beta^2 - (\alpha + 2\theta)\beta + \alpha\theta < 0.$$

Esta ecuación se satisface si, y sólo si  $\beta$  verifica:

$$\beta_-(\alpha) := \frac{\alpha + 2\theta - \sqrt{\alpha^2 + 4\theta^2}}{2} <$$

$$\beta < \frac{\alpha + 2\theta + \sqrt{\alpha^2 + 4\theta^2}}{2} = \beta_+(\alpha).$$

Como  $\beta_-(\cdot)$  es una función creciente con  $\alpha$ , se deduce que

$$\beta_-(\alpha) < \beta_-(0) = 0 < \beta,$$

dato que  $\beta > \theta > 0 > \alpha$ . Luego, para todos  $c \in (0, \bar{c})$  el conjunto  $\mathcal{C}_c \neq \emptyset$  si  $\beta < \beta_+(\alpha)$ .

Ahora mostremos que para todos  $c \in (0, \bar{c})$  existe  $\lambda_c < 1$  tal que para cualquier  $J \in P(I)$  tenemos:

$$\|\rho(\mathbf{V}) - \rho(\mathbf{W})\| \leq \lambda_c \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\| \quad \forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \Sigma_J \cap \mathcal{C}_c. \quad (5.17)$$

Supongamos que  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \Sigma_J \cap \mathcal{C}_c$  y sean  $i, l \in J$  tales que  $\mathbf{V} \in \Sigma_i$  y  $\mathbf{W} \in \Sigma_l$  (ver (5.9)). Sea  $k \in I$ . Si  $k \in J$  entonces por definición de  $\rho$

$$|\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| = 0. \quad (5.18)$$

Si  $k \notin J$  tenemos que considerar 4 casos:

**Caso 1:** Si  $\rho_k(\mathbf{V}) = \rho_k(\mathbf{W}) = \alpha$  entonces (5.18) se cumple.

**Caso 2:** Si  $\rho_k(\mathbf{V}) > \alpha$  y  $\rho_k(\mathbf{W}) > \alpha$  entonces, como  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  pertenecen ambos a  $\Sigma_J$  tenemos

$$|\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| = |\phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) - \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{W})}(\mathbf{W})|$$

Ahora,  $\mathbf{V} \in \Sigma_i$  y  $\mathbf{W} \in \Sigma_l$  implica que  $\bar{t}(\mathbf{V}) = t_i(\mathbf{V})$  y  $\bar{t}(\mathbf{W}) = t_l(\mathbf{W})$ . Usando (5.8) obtenemos:

$$\begin{aligned} |\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| &= \left| \frac{(\beta - W_k)(\beta - \theta)}{\beta - W_l} - \frac{(\beta - V_k)(\beta - \theta)}{\beta - V_i} \right| \\ &= \left| \frac{\beta - \theta}{\beta - W_l}(V_k - W_k) + \frac{(\beta - V_k)(\beta - \theta)}{(\beta - W_l)(\beta - V_i)}(W_l - V_i) \right| \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  pertenecen a  $\mathcal{C}_c$  para un  $c \in (0, \bar{c})$  tenemos

$$|\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| \leq \frac{\beta - \theta}{\beta - c} |V_k - W_k| + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \theta)}{(\beta - c)^2} |V_i - W_l|.$$

Supongamos  $V_i \leq W_l$ . Como  $t_i(\mathbf{V}) = \bar{t}(\mathbf{V})$ , tenemos  $V_l \leq V_i$ , lo que implica  $|V_i - W_l| \leq |V_l - W_l|$ , y

$$\begin{aligned} |\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| &\leq \frac{\beta - \theta}{\beta - c} |V_k - W_k| + \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \theta)}{(\beta - c)^2} |V_l - W_l| \\ &\leq \frac{\beta - \theta}{\beta - c} \left( 1 + \frac{\beta - \alpha}{\beta - c} \right) \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\| \quad \text{if } \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathcal{C}_c. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Supongamos  $W_l < V_i$ . Como  $t_l(\mathbf{W}) = \bar{t}(\mathbf{W})$ , tenemos  $W_l \geq W_i$ , lo que implica  $|V_i - W_l| \leq |V_i - W_i|$ , y la desigualdad ( 5.19 ) sigue siendo verdadera.

**Caso 3:** Si  $\rho_k(\mathbf{V}) > \alpha$  y  $\rho_k(\mathbf{W}) = \alpha$  entonces

$$\begin{aligned} |\rho_k(\mathbf{V}) - \rho_k(\mathbf{W})| &= \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J} H_{jk} - \alpha \\ &\leq \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J} H_{jk} - \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{W})}(\mathbf{W}) - \sum_{j \in J} H_{jk} \\ &\leq \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) - \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{W})}(\mathbf{W}) \end{aligned}$$

y obtenemos (5.19) de la misma manera que para el Caso 2.

**Caso 4:** Si  $\rho_k(\mathbf{V}) = \alpha$  y  $\rho_k(\mathbf{W}) > \alpha$  entonces, substituyendo  $\mathbf{V}$  por  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{W}$  por  $\mathbf{V}$  en el caso 3, obtenemos (5.19).

En resumen, si  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \mathcal{C}_c$ , para todos  $k \in I$  o (5.18) o (5.19) es verdadera y

$$\|\rho(\mathbf{V}) - \rho(\mathbf{W})\| \leq \lambda_c \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\| \quad \text{donde} \quad \lambda_c = \frac{\beta - \theta}{\beta - c} \left( 1 + \frac{\beta - \alpha}{\beta - c} \right).$$

Utilizando la definición de  $\bar{c}$  obtenemos  $\lambda_{\bar{c}} = 1$ . La cantidad  $\lambda_c$  siendo creciente con  $c$ , tenemos  $\lambda_c < \lambda_{\bar{c}}$  para todos  $c < \bar{c}$ , lo que termina la prueba.  $\square$

### 5.2.2. Parámetros de contracción

Proposición 5.2.2 no basta para asegurar que el mapa de retorno sea contractivo a trozos en un subconjunto  $\mathcal{C}_c$  de  $\Sigma$ . Se necesita en primer lugar

que  $\mathcal{C}_c$  sea invariante, y estudiar las propiedades topológicas de los conjuntos  $\Sigma_J \cap \mathcal{C}_c$ . Además, aún si el mapa de retorno fuera contractivo en  $\mathcal{C}_c$ , no tenemos información sobre la dinámica de los puntos de  $\Sigma \setminus \mathcal{C}_c$ . En lo que sigue, damos condiciones sobre los valores de los parámetros (hipótesis (H3) y (H4)) que aseguran la existencia de un subconjunto  $\Sigma^* \subset \Sigma$  compacto contenido en algún conjunto invariante  $\mathcal{C}_c$  (zona contractiva) tal que cualquier órbita termine entrando en  $\Sigma^*$ .

Ahora vamos a suponer que los parámetros de la red verifican las dos hipótesis siguientes:

**(H3)** La corriente  $I_{ext}$  no es demasiado fuerte, de tal manera que  $\beta < \beta_+(\alpha)$  y las interacciones  $H_{ji}$  satisfacen:

$$\min_{j \neq i} |H_{ji}| > \epsilon \quad \text{donde} \quad \epsilon := \frac{1}{2} \left( \sqrt{(\beta - \theta)^2 + 4(\beta - \theta)(\beta - \alpha)} - (\beta - \theta) \right).$$

**(H4)** Asumimos el principio del Dale: todas las synápsis de una neurona son excitatorias o inhibitorias. En otras palabras, la red no contiene neuronas mixtas.

Hipótesis (H3) es una condición abierta que relaciona la intensidad de la corriente externa y de la resistencia de la membrana (recordemos que  $\beta = RI_{ext}$ ) con la intensidad de las interacciones. En primer lugar, garantiza la existencia de una zona de contracción imponiendo  $\beta < \beta_+(\alpha)$  (ver Proposición 5.2.2). Por otro lado, impone a las interacciones una cota inferior  $\epsilon > 0$ . Esta cota es una función creciente de  $\beta - \theta$ . En el caso extremo, donde  $\beta - \theta$  tiende a  $\beta_+(\alpha) - \theta$ , la cota tiende al umbral  $\theta$ . Pero, si  $\beta - \theta$  tiende a 0 entonces, para satisfacer (H3), las interacciones tienen que ser diferentes de 0, pero pueden ser arbitrariamente cerca de 0. En otras palabras, dado valores fijos de las interacciones, nuestra descripción de la dinámica de la red será válida para un rango de corrientes externas tales que  $\beta = RI_{ext}$  esta suficientemente cerca de  $\theta$ . O equivalentemente, dado un valor fijo de  $RI_{ext}$ , esta descripción se aplica a todas las redes con interacciones suficientemente fuertes.

**Lema 5.2.3.** *Sea  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$ . Si existe  $m \geq 0$  such that  $J_m(\mathbf{V})$  contiene una neurona excitatoria entonces  $J(\mathbf{V}) = I$ . Por lo tanto, todas las neuronas disparan juntas, y como son idénticas, se mantienen sincronizadas para siempre.*

*Demostración:* Supongamos que  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$  y sea  $i \in J_0(\mathbf{V}) \neq I$ . Busquemos las neuronas de  $J_{m+1}(\mathbf{V})$ . Supongamos  $k \in I \setminus J_m(\mathbf{V})$ . Como  $\bar{t}(\mathbf{V}) =$

$t_i(\mathbf{V})$ , por (5.8) tenemos:

$$\phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) = \beta - \frac{(\beta - V_k)(\beta - \theta)}{\beta - V_i}.$$

Como  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$ , tenemos  $\alpha \leq V_k$  y  $V_i \leq \bar{c}$  lo que implica

$$\begin{aligned} \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) &\geq \beta - \frac{(\beta - \alpha)(\beta - \theta)}{\beta - \bar{c}} \\ &\geq \beta - \frac{4(\beta - \alpha)(\beta - \theta)}{2(\beta - \theta + \sqrt{(\beta - \theta)^2 + 4(\beta - \theta)(\beta - \alpha)})} \\ &\geq \beta - \frac{1}{2}\sqrt{(\beta - \theta)^2 + 4(\beta - \theta)(\beta - \alpha)} = \frac{1}{2}(\beta + \theta) - \epsilon > \theta - \epsilon. \end{aligned}$$

Como  $J_m(\mathbf{V})$  contiene una neurona excitatoria, se deduce que

$$\phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J_m(\mathbf{V}) : H_{jk} > 0} H_{jk} > \theta - \epsilon + \min_{j \neq i} |H_{ji}| > \theta,$$

y por definición de  $J_{m+1}(\mathbf{V})$ , tenemos que  $k \in J_{m+1}(\mathbf{V})$ . Deducimos que todo  $k \in I$  o sea  $k \in J_m(\mathbf{V})$  o sea  $k \in J_{m+1}(\mathbf{V})$ . En ambos casos  $k \in J(\mathbf{V})$ .  $\square$

Ahora aplicamos el Lema 5.2.3 para probar la existencia de un subconjunto compacto invariante en  $\mathcal{C}_{\bar{c}}$  (en la zona contractiva).

**Proposición 5.2.4.** *El conjunto  $\Sigma^* := \overline{\rho(\mathcal{C}_{\bar{c}})}$  esta contenido en  $\mathcal{C}_c$  para un  $c < \bar{c}$  y  $\rho(\Sigma^*) \subset \Sigma^*$ .*

*Demostración:* Se demuestra primero que existe  $c < \bar{c}$  tal que  $\rho(\mathcal{C}_{\bar{c}}) \subset \mathcal{C}_c$ . Sea  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$  y  $k \in I$ . Como por (5.13) sabemos que  $\alpha \leq \rho_k(\mathbf{V})$ , solo tenemos que probar que  $\rho_k(\mathbf{V}) \leq c$  para un  $c \in [0, \bar{c}]$ . Supongamos  $k \notin J(\mathbf{V})$ , entonces  $J(\mathbf{V}) \neq I$ , y como  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$  según el Lema 5.2.3 se tiene que  $J_0(\mathbf{V})$  contiene sólo a neuronas inhibitorias. Esto implica que  $\mathbf{V} \in \Sigma_J$  donde  $J := J(\mathbf{V}) = J_0(\mathbf{V})$ . Como  $k$  recibe sólo interacciones inhibitorias de las neuronas de  $J$ , tenemos:

$$\rho_k(\mathbf{V}) = \phi_k^{\bar{t}(\mathbf{V})}(\mathbf{V}) + \sum_{j \in J} H_{jk} \leq \theta - \min_{j \neq i} |H_{ji}| < \theta - \epsilon.$$

Un cálculo sencillo muestra que  $\theta - \epsilon = \bar{c}$  y tenemos que  $\rho_k(\mathbf{V}) \leq \theta - \min_{j \neq i} |H_{ji}| < \bar{c}$ . Ahora, si  $k \in J(\mathbf{V})$  entonces  $\rho_k(\mathbf{V}) = 0 < \bar{c}$ . Luego,

$\rho_k(\mathbf{V}) \leq \max\{0, \theta - \min_{j \neq i} |H_{ji}|\} < \bar{c}$  para todos  $k \in I$  y  $\rho(\mathbf{V}) \in \mathcal{C}_c$  con  $c = \max\{0, \theta - \min_{j \neq i} |H_{ji}|\} < \bar{c}$  para todo  $\mathbf{V} \in \mathcal{C}_{\bar{c}}$ .

Concluimos por un lado que  $\Sigma^* := \overline{\rho(\mathcal{C}_{\bar{c}})} \subset \overline{\mathcal{C}_c} = \mathcal{C}_c$  y por otro lado que  $\rho(\Sigma^*) \subset \rho(\mathcal{C}_{\bar{c}}) \subset \overline{\rho(\mathcal{C}_{\bar{c}})} = \Sigma^*$ .  $\square$

De esta ultima proposición deducimos que el mapa de retorno restringido a  $\Sigma^*$  ya satisface varios requerimientos para ser contractivo a trozos. La siguiente proposición entrega los elementos faltantes para terminar de demostrarlo.

**Proposición 5.2.5.** *Sea  $d : \Sigma^* \times \Sigma^* \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $d(\mathbf{V}, \mathbf{W}) = \|\mathbf{V} - \mathbf{W}\|$  donde  $\|\cdot\|$  denota la norma del máximo de  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos la topología inducida por la distancia  $d$  en  $\Sigma^*$ . Sea  $I^-$  el conjunto de las neuronas inhibitorias y denotemos*

$$\Sigma_{\{0\}}^* = \text{Int}(\Sigma_I \cap \Sigma^*) \quad \text{y} \quad \Sigma_{\{i\}}^* = \Sigma_{\{i\}} \cap \Sigma^* \quad \forall i \in I^-.$$

Entonces,

1) Los conjuntos  $\Sigma_{\{0\}}^*, \Sigma_{\{1\}}^*, \dots, \Sigma_{\{\#I^-\}}^*$  son abiertos, dos a dos disjuntos y

$$\Sigma^* = \bigcup_{i=0}^{\#I^-} \overline{\Sigma_{\{i\}}^*}.$$

2) Existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que para todo  $i \in \{0, 1, \dots, \#I^-\}$  se tiene que

$$d(\rho(\mathbf{V}), \rho(\mathbf{W})) \leq \lambda d(\mathbf{V}, \mathbf{W}) \quad \forall \mathbf{V}, \mathbf{W} \in \Sigma_{\{i\}}^*.$$

*Demostración:* Usando la partición  $\{\Sigma_J\}_{J \in P(I)}$  de  $\Sigma$  podemos construir una partición  $\mathcal{P}^*$  de  $\Sigma^*$  de la siguiente forma:

$$\mathcal{P}^* := \{\Sigma_J^*\}_{J \in P(I)} \quad \text{donde} \quad \Sigma_J^* := \Sigma_J \cap \Sigma^* \quad \forall J \in P(I).$$

En primer lugar, algunos átomos de  $\mathcal{P}^*$  son vacíos. De hecho, por el Lema 5.2.3, si  $J$  contiene neuronas excitatorias y  $J \neq I$ , entonces  $\Sigma_J^* = \emptyset$ . Como consecuencia, los conjuntos posiblemente no vacíos de  $\mathcal{P}^*$  son  $\Sigma_I^*$  y los conjuntos de  $\Sigma_J^*$  donde  $J \subset I^-$ . Resulta que

$$\Sigma^* = \left( \bigcup_{J \in P(I^-)} \Sigma_J^* \right) \cup \Sigma_I^*,$$

donde  $P(I^-)$  denota el conjunto de todos los subconjuntos no vacíos de  $I^-$ . Usando el hecho que  $\mathbf{V} \in \Sigma_J$  con  $J \in P(I^-)$  implica  $J(\mathbf{V}) = J_0(\mathbf{V})$ , se puede mostrar que si  $J \in P(I^-)$ , entonces  $\text{Int}(\Sigma_J^*) = \Sigma_{\{i\}}^*$  para algún  $i \in I^-$  (una prueba detallada se encuentra en [8]). Lo que termina de demostrar 1). La parte 2) es una consecuencia directa de las proposiciones 5.2.2 y 5.2.4.  $\square$

Acabamos de mostrar que bajo las hipótesis (H1), (H2), (H3) y (H4) la restricción del mapa de retorno  $\rho|_{\Sigma^*}$  al conjunto  $\Sigma^*$  es contractivo a trozos. Esto implica en particular que  $\rho|_{\Sigma^*}$  es continua en cada conjunto  $\Sigma_{\{i\}}^*$ . Los bordes de estos conjuntos están constituidos de los conjuntos  $\Sigma_J$  tales que  $\#\Sigma_J \geq 2$ . Mas precisamente,  $\partial\Sigma_{\{i\}}^* \subset \Sigma_J$  para un  $J$  tal que  $i \in \Sigma_J$  y  $\#\Sigma_J \geq 2$  (ver [8]). Como lo muestra el siguiente lema, esto implica que (genéricamente)  $\rho$  presenta un salto de discontinuidad en los bordes de las piezas de contracción. Denotaremos

$$\partial\mathcal{P}^* := \bigcup_{i=0}^{\#I^-} \partial\Sigma_{\{i\}}^*.$$

**Lema 5.2.6.** *Si  $\mathbf{V} \in \partial\mathcal{P}^*$ , entonces existe una sucesión  $\{\mathbf{U}^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $\Sigma^*$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{U}^m = \mathbf{V}$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|\rho(\mathbf{U}^m) - \rho(\mathbf{V})\| \geq \mu$  donde*

$$\mu := \min\{|\alpha|, \min_{i \neq j} |H_{ij} + \theta|\}. \quad (5.20)$$

*Prueba:* Sean  $\mathbf{V} \in \partial\mathcal{P}^*$  e  $i \in I^-$  tales que  $\mathbf{V} \in \partial\Sigma_{\{i\}}^*$ . Por definición de frontera, existe una sucesión  $\{\mathbf{U}^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  de puntos de  $\Sigma_{\{i\}}^*$  tal que  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{U}^m = \mathbf{V}$ . Para todo  $k \neq i$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \rho_k(\mathbf{U}^m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} \max\left\{\alpha, \beta - \frac{(\beta - U_k^m)(\beta - \theta)}{\beta - U_i^m} + H_{ik}\right\} \\ &= \max\left\{\alpha, \beta - \frac{(\beta - V_k)(\beta - \theta)}{\beta - V_i} + H_{ik}\right\}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si  $\mathbf{V} \in \partial\Sigma_{\{i\}}^*$ , entonces pertenece a un conjunto  $\Sigma_J^*$  tal que  $i \in J$  y  $\#J \geq 2$ . Luego, existe  $j \neq i$  en  $J$  tal que  $V_i = V_j$  y  $\lim_{m \rightarrow \infty} \rho_j(\mathbf{U}^m) = \max\{\alpha, H_{ij} + \theta\}$ . Como  $j \in J$  y  $\mathbf{V} \in \Sigma_J^*$ , tenemos que  $\rho_j(\mathbf{V}) = 0$ , y obtenemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\rho(\mathbf{V}) - \rho(\mathbf{U}^m)\| \geq \lim_{m \rightarrow \infty} |\rho_j(\mathbf{V}) - \rho_j(\mathbf{U}^m)| = |\max\{\alpha, H_{ij} + \theta\}|$$

lo que permite obtener la desigualdad deseada.  $\square$

Finalmente, se puede mostrar bajo las mismas hipótesis que en toda red que contenga una neurona inhibitoria existe un tiempo  $p$  tal que  $\rho^p(\Sigma) \subset \Sigma^*$  (ver [8]). En otras palabras, el estudio de las redes que contienen neuronas inhibitorias se reduce al análisis de la dinámica del mapa  $\rho|_{\Sigma^*}$ . También las redes totalmente excitatorias pueden ser estudiadas, incluso en un rango más amplio de parámetros. La dinámica asintótica de estas redes está principalmente sincronizada [8]. En lo que sigue estudiamos con más detalles la dinámica del mapa  $\rho|_{\Sigma^*}$  que, por comodidad, denotaremos  $\rho$ .

### 5.3. Dinámica asintótica de las redes con neuronas inhibitorias

Ahora nos centramos en redes que contienen al menos una neurona inhibitoria. A lo largo de esta sección, se asume que los parámetros de la red satisfacen las hipótesis (H1), (H2), (H3) y (H4) y que el conjunto  $I^-$  de las neuronas inhibitorias no es vacío. En la sección 5.3.1, introducimos los conceptos de conjunto estable y sensible conjunto. Luego, en la sección 5.3.2 damos y comentamos los principales resultados sobre la dinámica asintótica del mapa retorno en ambos conjuntos.

#### 5.3.1. Los conjuntos estables y sensibles

Con el fin de estudiar la dinámica asintótica del mapa retorno, dividimos el espacio  $\Sigma^*$  en dos conjuntos complementarios: el conjunto estable  $S$  y el conjunto sensible  $C = \Sigma^* \setminus S$ .

**Definición 5.3.1.** (*Conjunto estable*) Un punto  $\mathbf{V} \in \Sigma^*$  es estable, si para todo  $\nu > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que para todo  $p \in \mathbb{N}$ :

$$\text{si } \|\rho^p(\mathbf{V}) - \mathbf{W}\| < \delta \text{ entonces } \|\rho^k(\rho^p(\mathbf{V})) - \rho^k(\mathbf{W})\| < \nu \quad \forall k \geq 1. \quad (5.21)$$

Llamamos conjunto estable y denotamos  $S$  el conjunto de todos los puntos estables.

Si  $\mathbf{V}$  es un punto estable, entonces la órbita de cualquier perturbación suficientemente pequeña de un punto de la órbita  $\mathbf{V}$  se mantiene cerca de la órbita de  $\mathbf{V}$ . Si el estado inicial de la red es estable, se puede esperar

que una pequeña perturbación modifique un poco y temporalmente los tiempos entre las espigas, pero no cambia las neuronas que disparan.

**Definición 5.3.2.** (*Conjunto sensible*) Un punto  $\mathbf{V} \in \Sigma^*$  es sensible, si existe  $\nu > 0$  tal que para todo  $\delta > 0$  existen  $p \in \mathbb{N}$  y  $\mathbf{W} \in \Sigma^*$  que satisfacen:

$$\|\rho^p(\mathbf{V}) - \mathbf{W}\| < \delta \quad \text{y} \quad \|\rho^k(\rho^p(\mathbf{V})) - \rho^k(\mathbf{W})\| \geq \nu \quad \text{para algún } k \geq 1.$$

Llamamos conjunto sensible y denotamos  $C$ , el conjunto de todos los puntos sensibles.

El conjunto sensible es el conjunto de los puntos que no son estables. Si la red esta en un estado sensible, existen perturbaciones arbitrariamente pequeñas que producen un cambio consecuente de su evolución temporal. Por lo general, este tipo de perturbaciones modifican las neuronas que disparan.

Es sencillo verificar que el conjunto estable es invariante por adelante ( $\rho(S) \subset S$ ) y el conjunto sensible invariante por atrás ( $\rho^{-1}(C) \subset C$ ).

Ahora, damos una caracterización del conjunto estable:

**Lema 5.3.3.** *Para todo  $\eta > 0$ , sea  $S_\eta$  el conjunto de los puntos estables cuya órbita está a distancia mayor que  $\eta$  de  $\partial\mathcal{P}^*$ :*

$$S_\eta := \{\mathbf{V} \in S : d(\rho^p(\mathbf{V}), \partial\mathcal{P}^*) \geq \eta \quad \forall p \in \mathbb{N}\} \quad \forall \eta > 0$$

entonces,

$$S = \bigcup_{\eta > 0} S_\eta. \quad (5.22)$$

*Demostración:* Por definición,  $S_\eta \subset S$  para cualquier  $\eta > 0$ . Ahora, sea  $\mathbf{V} \in S$  y supongamos por contradicción que  $\mathbf{V} \notin S_\eta$  para todo  $\eta > 0$ . Sean  $\delta > 0$  y  $\mu$  el salto de discontinuidad de  $\rho$  en  $\partial\mathcal{P}^*$  definido en (5.20). Como  $\mathbf{V}$  es un punto estable existe  $0 < \delta_0 < \delta$  tal que para todo  $p \in \mathbb{N}$

$$\text{si } \|\rho^p(\mathbf{V}) - \mathbf{U}\| < \delta_0 \quad \text{entonces} \quad \|\rho(\rho^p(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{U})\| < \frac{\mu}{4}.$$

Como  $\mathbf{V} \notin S_{\delta_0/2}$  existe  $p_0$  y  $\mathbf{W} \in \partial\mathcal{P}^*$  tal que

$$\|\rho^{p_0}(\mathbf{V}) - \mathbf{W}\| < \frac{\delta_0}{2} < \delta.$$

Según el Lema 5.2.6, existen  $\mathbf{U} \in \Sigma^*$  tal que

$$\|\mathbf{W} - \mathbf{U}\| < \frac{\delta_0}{2} \quad \text{y} \quad \|\rho(\mathbf{W}) - \rho(\mathbf{U})\| > \frac{\mu}{2}.$$

Para este  $\mathbf{U}$  tenemos  $\|\rho^{p_0}(\mathbf{V}) - \mathbf{U}\| \leq \|\rho^{p_0}(\mathbf{V}) - \mathbf{W}\| + \|\mathbf{W} - \mathbf{U}\| < \delta_0$ .  
Por lo tanto,

$$\|\rho(\rho^{p_0}(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{W})\| \geq \|\rho(\mathbf{W}) - \rho(\mathbf{U})\| - \|\rho(\rho^{p_0}(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{U})\| \geq \left| \frac{\mu}{2} - \frac{\mu}{4} \right| = \frac{\mu}{4}.$$

En resumen, hemos demostrado la existencia de un  $\nu := \mu/4$  tal que cualquier  $\delta > 0$ , existen  $p_0$  y  $\mathbf{W}$  tales que

$$\|\rho^{p_0}(\mathbf{V}) - \mathbf{W}\| < \delta \quad \text{y} \quad \|\rho(\rho^{p_0}(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{W})\| \geq \nu.$$

Deducimos que  $\mathbf{V}$  pertenece al conjunto sensible, lo que es una contradicción. Llegamos a la conclusión de que para todos  $\mathbf{V} \in S$  existe  $\eta > 0$  tal que  $\mathbf{V} \in S_\eta$ .  $\square$

Cada conjunto  $S_\eta$  es invariante y no contiene punto de  $\partial\mathcal{P}^*$ . En otras palabras,

$$\rho(S_\eta) \subset S_\eta \quad \text{y} \quad S_\eta \subset \bigcup_{i=0}^{\#I^-} \Sigma_{\{i\}}^* \quad \forall \eta > 0. \quad (5.23)$$

y por (5.22) las mismas relaciones son verdaderas para  $S$ . En particular  $\rho$  es continua en cualquier  $S_\eta$  y en  $S$ . También  $\partial\mathcal{P}^*$  es un subconjunto del conjunto sensible. Las relaciones (5.23) muestran que si el estado inicial de la red es estable, entonces o sea la red se sincroniza (si su órbita visita  $\Sigma_{\{0\}}^*$ ), o sea sólo las neuronas inhibitorias disparan y nunca al mismo tiempo. La situación en la que varias neuronas inhibitorias disparan en el mismo tiempo se produce sólo cuando la red está en un estado sensible.

### 5.3.2. Ciclos límites y caos débil

Aquí damos los resultados principales sobre la dinámica asintótica del mapa de retorno y su interpretación sobre la de la red.

**Definición 5.3.4.** (*conjunto  $\omega$ -límite*) El conjunto  $\omega$ -límite  $\omega(\mathbf{V})$  de un punto  $\mathbf{V} \in \Sigma^*$  es el conjunto de los puntos límites de la órbita futura de  $\mathbf{V}$ , es decir:

$$\omega(\mathbf{V}) = \{\mathbf{W} \in \Sigma^* : \exists \{p_k\}_{k \in \mathbb{N}} \lim_{k \rightarrow \infty} p_k = +\infty \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \rho^{p_k}(\mathbf{V}) = \mathbf{W}\}.$$

Para un conjunto  $A \subset \Sigma^*$ , denotamos  $\omega(A)$  la unión los conjuntos  $\omega$ -límite de los puntos de  $A$ . Es decir,

$$\omega(A) := \bigcup_{\mathbf{V} \in A} \omega(\mathbf{V}).$$

En otras palabras,  $\mathbf{W}$  pertenece al conjunto  $\omega$ -límite de  $\mathbf{V}$  si existe una sub-sucesión de la órbita de  $\mathbf{V}$  que converge a  $\mathbf{W}$ . Como el espacio de fases  $\Sigma^*$  es compacto, el conjunto  $\omega$ -límite de cualquier punto no es vacío. Intuitivamente, el conjunto  $\omega$ -límite de  $\mathbf{V}$  es el conjunto de los puntos de  $\Sigma^*$  para los cuales existen una vecindad arbitrariamente chica que siempre esta visitada por la órbita de  $\mathbf{V}$ . En este sentido, los puntos de  $\omega(\mathbf{V})$  son los que atraen a la órbita de  $\mathbf{V}$ . El conjunto  $\omega(\mathbf{V})$  es invariante si  $\rho$  es continua en  $\omega(\mathbf{V})$ , lo que no es necesariamente el caso para cualquier  $\mathbf{V}$ . Sin embargo, el conjunto  $\omega$ -límite es el mismo para todos los puntos de una misma órbita.

**Definición 5.3.5.** (*Ciclo límite*) Un conjunto  $L \subset \Sigma^*$  es un ciclo límite, si  $L$  es una órbita periódica cuya cuenca de atracción

$$\mathcal{B}(L) := \{\mathbf{W} \in \Sigma^* : \omega(\mathbf{W}) = L\}$$

contiene una vecindad abierta de  $L$ .

Ahora enunciamos los dos resultados importantes de esta sección:

**Proposición 5.3.6.** *Para todo  $\eta > 0$  tal que  $S_\eta \neq \emptyset$ , el conjunto  $S_\eta$  contiene sólo un número finito  $N(\eta)$  de ciclos límite, y cualquier punto de  $S_\eta$  pertenece a la cuenca de atracción de uno de estos ciclos límite. En otras palabras, para todos  $\eta > 0$*

$$\omega(S_\eta) = \bigcup_{i=1}^{N(\eta)} L_i,$$

donde cada set  $L_i$  es un ciclo límite contenido en  $S_\eta$ .

No damos aquí la prueba de la proposición, pero se puede encontrarla en [8]. Esta proposición nos permite deducir el principal resultado de este capítulo.

**Teorema 5.3.7.** *Si  $S \neq \emptyset$ , entonces contiene una cantidad numerable de ciclos límites y cualquier punto estable pertenece a la cuenca de atracción de uno de estos ciclos límite. En otras palabras,*

$$\omega(S) = \bigcup_{i=1}^N L_i,$$

donde cada conjunto  $L_i$  es un ciclo límite contenido en  $S$ . Por otra parte, el número  $N$  de ciclos límite es finito si  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}) > 0$  y es infinito, pero numerable, si  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}) = 0$ .

*Demostración:* Por el Lema 5.3.3 cualquier punto estable  $\mathbf{V}$  pertenece a un  $S_\eta$  para algún  $\eta > 0$ . Por lo tanto, según Proposición 5.3.6, el conjunto  $\omega(\mathbf{V})$  es un ciclo límite contenido en  $S_\eta \subset S$ . Como para todo  $\eta' > \eta$  se tiene que  $S_{\eta'} \subset S_\eta$  podemos reescribir (5.22) como

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_{l/k} \quad \text{donde} \quad l := \max_{\mathbf{V} \in \Sigma^*} d(\mathbf{V}, \partial\mathcal{P}^*).$$

Dado que para cada  $k \in \mathbb{N}$  el conjunto  $\omega(S_{l/k})$  es una unión finita de ciclos límite y  $S$  es la unión numerable de los conjuntos  $S_{l/k}$ , se deduce que  $\omega(S)$  es una unión numerable de ciclos límite.

Si  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}^*) > 0$ , entonces existe  $\eta > 0$  tal que  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}^*) \geq \eta$ . Como los puntos de  $\omega(S)$  son estables, el mapa de retorno es continuo en  $\omega(S)$ , por lo que  $\omega(S)$  es invariante. Por lo tanto, la órbita de cualquier punto de  $\omega(S)$  se mantiene a una distancia mayor que  $\eta$  de  $\partial\mathcal{P}^*$ . En otras palabras,  $\omega(S) \subset S_\eta$ . Por la Proposición 5.3.6 esto implica que  $\omega(\omega(S))$  es una unión finita de ciclos límite. Pero como  $\omega(S)$  contiene sólo puntos periódicos tenemos que  $\omega(\omega(S)) = \omega(S)$ . Esto muestra áque si  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}^*) > 0$  entonces  $\omega(S)$  es una unión finita de ciclos límite.

Ahora supongamos  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}^*) = 0$ . Entonces, o sea  $\omega(S) \cap \partial\mathcal{P}^* \neq \emptyset$ , o sea existe una sucesión infinita de puntos distintos en  $\omega(S)$  que converge a un punto de  $\partial\mathcal{P}^*$ . La primera opción es imposible ya que  $\omega(S) \subset S$  y  $\partial\mathcal{P}^*$  es un subconjunto del conjunto sensible. Por lo tanto,  $\omega(S)$  es infinito. Esto termina la prueba, ya que por otro lado ya sabemos que  $\omega(S)$  es numerable.  $\square$

Ahora detallamos las consecuencias de los resultados anteriores sobre la dinámica redes neuronales de tipo ID.

Teorema 5.3.7 establece que si el estado inicial de una red es estable, entonces cuando el tiempo tiende a infinito, la red tiende a disparar periódicamente, ya que la órbita de este estado inicial se acumula en un ciclo límite. Si una neurona excitatoria dispara, este ciclo límite es una

órbita sincronizada. Si ninguna neurona excitatoria dispara, entonces los patrones de disparo de cada neurona presentan un período común, pero no están sincronizados (recuerde (5.23), dos neuronas inhibitorias no pueden disparar al mismo tiempo). Según el estado inicial estable inicial de la red, el ciclo límite al cual converge su órbita puede cambiar. Sin embargo, el conjunto estable contiene sólo una cantidad numerable de ciclos límite y, ciertamente, para la mayoría de los valores de los parámetros este número es finito.

La situación descrita anteriormente no impide que la dinámica estable de la red tenga un comportamiento que parezca caótico, en un sentido amplio del término. Por definición del conjunto estable, cualquier perturbación suficientemente pequeña se amortigua y no modifica el patrón asintótico periódico de la red. Sin embargo, el tamaño de dicha perturbación depende del conjunto  $S_\eta$  al que pertenece el estado inicial  $\mathbf{V}$  de la red. Si  $\eta$  es pequeño, entonces la órbita de  $\mathbf{V}$  puede acercarse al conjunto de discontinuidad  $\partial\mathcal{P}^*$ , o más generalmente, acercarse a un punto sensible. En tal caso, algunas perturbaciones pequeñas pueden cambiar significativamente el comportamiento asintótico de la red, enviando la órbita a la cuenca de atracción de otro ciclo límite. Este fenómeno se vuelve crítico si  $d(\omega(S), \partial\mathcal{P}^*) < \delta$  con  $\delta$  pequeño. Esto significa que las órbitas estables se acumulan en ciclos límite ubicados cerca de las fronteras de las piezas de  $\Sigma_{\{i\}}$ . En tal caso, al acercarse de un ciclo límite la órbita de un punto estable puede cambiar de pieza bajo el efecto de una perturbación pequeña y entrar en la cuenca de atracción de otro ciclo. Si esta perturbación se aplica en forma repetitiva, por ejemplo por errores de redondeo en simulaciones numéricas o en presencia de ruido, puede que la órbita cambie de cuenca de atracción cada vez que se acerca de un ciclo límite. En tal caso no se observara o tomara mucho observar el comportamiento periódico.

Teorema 5.3.7 y la Proposición 5.3.6 son resultados sobre la dinámica asintótica del conjunto estable. Sin embargo, el lema 5.3.3 nos permite hacer algunos comentarios acerca de la dinámica del conjunto complementario, es decir, el conjunto sensible. Este lema demuestra que cualquier punto estable pertenece a un conjunto  $S_\eta$  para algunos  $\eta > 0$ . Por lo tanto, todos los puntos de la órbita de un punto estable  $\mathbf{V}$  están a una distancia mayor que  $\eta(\mathbf{V}) > 0$  de  $\partial\mathcal{P}^*$ . De ello se deduce que el conjunto sensible se constituye de los puntos cuya órbita esta arbitrariamente cerca de  $\partial\mathcal{P}^*$ . Estos puntos son los de  $\partial\mathcal{P}^*$  y de todas sus pre-imágenes

$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \rho^{-k}(\partial\mathcal{P}^*)$ , así como los puntos cuyo conjunto  $\omega$ -límite contiene un punto de  $\partial\mathcal{P}^*$ . Formalmente,

$$C = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \rho^{-k}(\partial\mathcal{P}^*) \bigcup \mathcal{C} \quad \text{donde} \quad \mathcal{C} := \{\mathbf{V} \in \Sigma^* \mid \omega(\mathbf{V}) \cap \partial\mathcal{P}^* \neq \emptyset\}.$$

Los puntos de  $C$  que no están en  $\mathcal{C}$  tienen una órbita que es finalmente estable y Teorema 5.3.7 se aplica a alguna de sus imágenes. El conjunto  $\mathcal{C}$  es invariante, y para cualquier estado inicial en este conjunto, existen perturbaciones arbitrariamente pequeñas que producen un gran cambio en su órbita. La invariancia de  $\mathcal{C}$  y su sensibilidad a perturbaciones arbitrariamente pequeñas son ingredientes del concepto de caos. Sin embargo, no son suficientes para asegurar la presencia de caos desde un punto de vista estrictamente matemático. En particular, la existencia de mapas contractivos a trozos con atractores caóticos es una pregunta bastante abierta. Sin embargo, podemos mencionar [9] donde esta cuestión y más generalmente la naturaleza de atractores que contienen puntos de discontinuidad se investiga.

Los resultados de esta sección muestran que el carácter contractivo a trozos del mapa de retorno lleva la dinámica estable a ser asintóticamente periódica. Sin embargo, esto no impide que la red tenga una dinámica que pueda parecer caótica cuando esta sujeta a perturbaciones y que se observa a escalas de tiempo finitas. La riqueza de esta dinámica perturbada depende de como el conjunto estable y el conjunto caótico se distribuyen en el espacio de fase. Una descripción más detallada de estos fenómenos necesitaría un mejor conocimiento de la dinámica de mapas contractivos a trozos perturbados.

## Agradecimientos

P.G agradece el grupo de Neurodinámica de la Universidad de la Republica y en particular Eleonora Catsigeras por su acogida en Montevideo. Este trabajo recibió un apoyo del Programa Regional Mathamsud 13MATH 04.



## Bibliografía

- [1] N.K. Bose and P. Liang: *Neural network fundamentals with graphs, algorithms, and applications*. McGraw–Hill, 1996.
- [2] S. Bottani: *Synchronization of integrate and fire oscillators with global coupling*. Physical Review E **54** (1996), pp. 2334–2350 doi: 10.1103/PhysRevE.54.2334
- [3] J. Bremont: *Dynamics of injective quasi contractions*. Erg. Theor. Dyn Syst. **26** (2006), pp. 19–44
- [4] R. Brette, M. Rudolph, T. Carnevale, M. Hines, D. Beeman, J.M. Bower: *Simulation of networks of spiking neurons: A review of tools and strategies*. J. Comput. Neurosci. **23** (2007), pp. 349–398.
- [5] E. Catsigeras: *Chaos and stability in a model of inhibitory neuronal network*. International Journal of Bifurcation and Chaos **20** (2010), pp. 349–360.
- [6] E. Catsigeras, R. Budelli: *Limit cycles of a bineuronal network model*. Physica D **56** (1992), pp. 235–252
- [7] E. Catsigeras, R. Budelli: *Topological dynamics of generic piecewise continuous contractive maps in  $n$  dimensions*. Int. Journ. Pure Appl. Math **68** (2011), pp. 61–83
- [8] E. Catsigeras, P. Guiraud: *Integrate and fire neural networks, piecewise contractive maps and límite cycles*. Journal of Math. Biology **67** (2013), pp. 609–655 DOI 10.1007/s00285-012-0560-7
- [9] E. Catsigeras, P. Guiraud, A. Meyroneinc, E. Ugalde: *On the Asymptotic Properties of Piecewise Contracting Maps* Dynam. Systems: An International Journal (In press, 2015), doi: 10.1080/14689367.2015.1068274

- [10] E. Catsigeras, A. Rovella, R. Budelli: *Contractive piecewise continuous maps modeling networks of inhibitory neurons*. Int. Journ. Pure Appl. Math. **61** (2010), pp. 381–408
- [11] B. Cessac: *A discrete time neural network model with spiking neurons. Rigorous results on the spontaneous dynamics*. Journ. Math. Biol. **56** (2008), pp. 311–345
- [12] B. Cessac and T. Viéville: *In dynamics of integrate-and-fire neural networks with conductance based synapses*. Frontiers In Computational Neuroscience **2** (2008) doi: 10.3389/neuro.10.002.2008
- [13] J.R Chazottes, B. Fernandez (Eds): *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*. Lecture notes in Physics **671** Springer, Berlin.
- [14] Course Notes: *Sensory and Perceptual Processes*. Univ. Washington.
- [15] J.C. Eccles: *The physiology of synpasis*. Academic Press, 2013.
- [16] G.B. Ermentrout: *Type I membranes, phase resetting curves, and synchrony*. Neural Comput. **8** (1996), pp. 979–1001.
- [17] G.B. Ermentrout and D.H. Terman: *Mathematical Foundations of Neuroscience*. Springer, 2010
- [18] R. FitzHugh: *Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane*. Biophysical journal **1** (1961), N. 6, pp. 445
- [19] J.M. Gambaudo, C. Tresser: *On the dynamics of quasi-contractions*. Bol. Soc. Bras. Mat. **19** (1988), pp. 61–114
- [20] W. Gerstner, W. Kistler: *Spiking neuron models*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [21] F. Hamzei-Sichani, N. Kamasawa, W.G. Janssen, T. Yasumura, K.G. Davidson, P.R. Hof, R.D. Traub: *Gap junctions on hippocampal mossy fiber axons demonstrated by thin-section electron microscopy and freeze-fractura replica immunogold labeling*. Proceedings of the National Academy of Sciences **104** (2007), N. 30, pp. 12548–12553.
- [22] A.L. Hodgkin, A. Huxley: *A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve*. Journ. Physiology **117** (1952), pp. 500–544.

- [23] F.C. Hopfield, E.M. Izhikevich: *Weakly Connected Neural Networks*, Springer Verlag, New York, 1997.
- [24] E. M. Izhikevich: *Class 1 Neural Excitability, Conventional Synapses, Weakly Connected Networks, and Mathematical Foundations of Pulse-Coupled Models*. IEEE Trans. On Neural Networks **10** (1999), pp. 499–507.
- [25] E. M. Izhikevich: *Weakly Pulse-Coupled Oscillators, FM Interactions, Synchronization, and Oscillatory Associative Memory*. IEEE Trans. On Neural Networks **10** (1999), pp. 508–526.
- [26] E.M. Izhikevich: *Dynamical Systems in Neuroscience: The Geometry of Excitability and Bursting*. MIT Press, 2007
- [27] D.Z. Jin: *Fast convergence of spike sequences to periodic patterns in recurrent networks*. Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 208102.
- [28] A. Katok, B. Hasselblatt: *Introduction to Modern Theory of Dynamical Systems*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
- [29] W. Mass, C.M. Bishop (Eds): *Pulsed Neural Networks*. MIT Press, Cambridge, 2001
- [30] M. Megías, Z.S. Emri, T.F. Freund, A.I. Gulyás: *Total number and distribution of inhibitory and excitatory synapses on hippocampal CA1 pyramidal cells*. Neuroscience **102** (2001), pp. 527–540.
- [31] R.E. Mirollo and S.H. Strogatz: *Synchronization of pulse-coupled biological oscillators*. SIAM J. Appl. Math. **50** (1990) pp. 1645–1662.
- [32] J. Nagumo, S. Arimoto, S. Yoshizawa: *An active pulse transmission line simulating nerve axon*. Proceedings of the IRE **50** (1962), N. 10, pp. 2061–2070.
- [33] M.E. Newman: *Assortative mixing in networks*. Physical Review Letters **89** (2002), N. 20, 208701.
- [34] G.M. Ramírez Ávila, J.L. Guisset, J.L. Deneubourg: *Synchronization in light-controlled oscillators*. Physica D **182** (2003), pp. 254–273.

- [35] R. Rojas: *Neural networks: a systematic introduction*. Springer Science and Business Media, 1996.
- [36] N.Rubido, C.Cabeza, S.Kahan, G.M.Ramírez Ávila, A.C. Martí: *Synchronization regions of two pulse-coupled electronic piecewise linear oscillators*. *Europ. Phys. Journ. D* **62** (2011), pp. 51–56, doi: 10.1140/epjd/e2010-00215-4
- [37] W. Rudin: *Análisis Real y Complejo*. Ed. Alhambra, Madrid, 1979
- [38] M. Rudolph, A. Destexhe: *How much can we trust neural simulations strategies?* *Neurocomputing* **70** (2007) 1966–1969.
- [39] J. Sotomayor: *Licões de equações diferenciais ordinárias*. IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1979
- [40] C.F. Stevens: *Neurophysiology: A primer*. John Wiley & Sons, 1966.
- [41] P. Strata, R. Harvey: *Dale's Principle*. *Brain Research Bull.* **50** (1999) pp. 349–350 doi:10.1016/S0361-9230(99)00100-8
- [42] T. Yang, L.O. Chua: *Impulsive stabilization for control and synchronization of chaotic systems: theory and application to secure communication*. *IEEE Trans. Circuits Syst.* **44** (1997), pp. 976–988

# Índice alfabético

- a trozos
  - continuo, 88
  - contractivo, 86, 98
- aristas, 49, 77
- axón, 7
  
- bifurcación de Hopf, 22
  
- camino, 57, 67
  - dirigido, 57
  - largo de, 57
- canales iónicos, 7, 12
- capacitancia, 11, 108
- celda, 73
- ciclo límite, 37, 126
- circuito, 10, 12
- coalición, 49, 52, 56, 61, 62, 65, 68
- conexión fuerte, 59
- conexión fuerte, 57, 62, 66, 68
- conexiones sinápticas, 30
- conjunto
  - estable, 123, 124, 126, 128
  - sensible, 124, 125, 128
- construcción de métrica, 94
- continuidad
  - a trozos, 88, 122
  - piezas de, 88
- contractividad
  - a trozos, 86, 98, 115, 121
  - piezas de, 86, 88
- contractividad a trozos, 98
  
- convexidad, 94
- cooperatividad, 46
- corriente externa, 11, 108
  
- Dale, principio de, 48
- dendritas, 7
- difusión, 8
- dinámica
  - asintótica, 33, 123, 128
  - en el círculo, 36
  - libre, 75, 82
  - regularización de la, 34
  - representación gráfica, 54
- discontinuidad, 31, 74, 105, 122
- disparo, 74, 76, 77, 105
  - espontáneo, 82, 108, 112
  - recurrente, 58
  - simultáneo, 60
  - sincronizado, 49, 52, 56, 61, 62, 65, 68
  - tiempo de, 45, 59, 67, 77, 81, 85
- distancia
  - direccionada, 58
  - entre vértices, 58
  
- ecuaciones diferenciales, 11, 13, 28, 29, 44, 74, 75, 81, 105, 108
- equilibrio
  - de potencial de membrana, 8
  - estado de, 7
  - puntos de, 18

- espacio de fases, 78, 79
- espiga, 14, 105, 111, 114
- espigas, 108
- estabilidad, 20, 21, 123, 124, 127, 128
  - asintótica, 21
- estado
  - de la neurona, 112
- estado de la red, 48, 78
- estado inicial, 42, 48, 111
- excitabilidad, 23
- excitación, 15, 30, 106
- extensión
  - de función , 81
  - de grafo, 62, 65, 67, 68
- fórmula
  - de Liouville, 95
  - del mapa de Poincaré, 88
- fenómeno refractario, 78, 112
- FitzHugh-Nagumo (FHN), 12, 18
  - circuito de, 12
  - ecuaciones de, 13
  - estabilidad, 20
- flujo, 34, 78
  - ficticio extendido, 81
  - tangente, 34
  - transversal, 85
  - tubular, 90, 92
- forma de estrella, 59, 61, 65, 67
- formula
  - de estado de la neurona, 112
- grafo, 49, 77
  - asociado, 49, 50, 62, 67, 68
  - completo, 50, 62, 66, 74, 83, 98
  - con forma de estrella, 59, 61, 65, 67
  - conexo, 57
  - dirigido, 49
  - extensión, 62, 65, 67, 68
  - fuertemente conexo, 57, 59, 62, 66, 68
  - gran coalición, 49, 52, 56, 61, 62, 65, 68
  - hendidura sináptica, 16
  - hiperplano transversal, 85
  - hiperpolarización, 9
  - Hodkin-Huxley (HH), 10
    - circuito de, 10
    - ecuaciones de, 11
  - ión, 7
    - de calcio, 7
    - de cloro, 12
    - de potasio, 7, 12
    - de sodio, 7, 12
  - impulsos, 41, 77, 79, 105
  - inhibición, 15, 30, 74, 106
  - instante
    - de disparo, 45, 67, 77, 81, 85
  - instantes de disparo, 45
  - integración y disparo, 27
  - integración y disparo (ID), 106
  - interacción
    - instantánea, 43, 77
    - sináptica, 74
    - eficiente, 79, 83
    - sináptica, 77, 79, 106
  - interacciones
    - eficientes, 98
  - largo de camino, 57
  - lazos, 49
  - levantamiento, 36
  - métrica, 94
  - mapa

- continuo a trozos, 88
- contractivo, 86
- contractivo a trozos, 86, 98, 115, 121
- de retorno, 48, 55, 67, 85, 98, 111, 114
- discontinuo, 88
- mapa de Poincaré, 36, 80, 85, 98
  - fórmula, 88
- mapa de retorno, 121
- membrana, 14
  - permeabilidad de, 7, 80
  - potencial de, 7
  - pre y post sináptica, 14–16
- modelo, 5, 10, 12, 108
  - biofísico, 5
  - de FitzHugh-Nagumo (FHN), 12
  - de Hodgkin-Huxley (HH), 10
  - de integración y disparo, 27
  - de neurona, 5, 10, 12, 23
  - de red con gran coalición, 61, 65
  - de red de dos neuronas, 28, 30
  - de red neuronal, 5, 42
  - de sinapsis, 14
  - en el círculo, 29
  - en el toro, 29
  - integración y disparo, 106
- número de rotación, 36
- neurona, 10, 12, 73
  - biológica genérica, 7
  - cooperativa, 46
  - excitatoria, 30, 109, 119, 120
  - inhibitoria, 30, 74, 109, 120, 121
  - marcapasos, 77
  - pre y post sináptica, 30, 80
- neurotransmisores, 15, 16
- nivel de umbral, 14, 42, 46
- omega-límite, 37, 125, 126
- orbita, 29, 78, 111
  - finalmente estable, 129
  - finalmente periódica, 49
  - periódica, 37, 114
- osciladores acoplados, 106
- parámetros de contracción, 118
- partición, 113, 121
- período refractario, 24, 78
- permeabilidad, 12, 80
- pesos sinápticos, 110
- piezas
  - de continuidad, 88, 113, 122
  - de contractividad, 86, 88, 122
- Poincaré
  - mapa de, 36, 48, 80, 85
  - sección de, 80, 84, 110
- potencial de acción, 9
- potencial de membrana, 7, 9, 11, 16, 74, 105
  - equilibrio de, 8
- potencial de reset, 79
- potencial de umbral, 14, 28, 42, 46, 74, 105
- potenciales de Nerst, 12, 16
- principio
  - de “Large Cooperativity”, 52
  - de Dale, 48, 119
  - del palomar, 59, 64
- pulso instantáneo, 14
- punto
  - estable, 127
  - sensible, 124
- puntos de equilibrio, 18
- régimen
  - continuo, 42, 47

- de disparo, 42, 47, 59, 67, 74, 76, 108, 111
- entre disparos, 75
- sub-umbral, 108, 111
- receptores, 15
- red neuronal, 5
  - con gran coalición, 61, 65
  - con interacciones eficientes, 83
  - con interacciones impulsivas, 41
  - cooperativa, 46, 50, 59
  - de dos neuronas, 30, 37
  - de flujo tubular, 92
  - de signos cualesquiera, 31
  - desacoplada, 30
  - estado de, 48, 78
  - excitatoria, 31
  - inhibitoria, 31, 77, 83, 98
  - no inhibitoria, 37
  - parámetros de, 46
- regularidad  $C^2$ , 38
- regularización, 34
- reset, 28, 76, 79, 85, 105, 111
- resistencia de membrana, 108
- salto de discontinuidad, 31, 74, 105, 122
- sección de Poincaré, 80, 84, 111
- sensibilidad, 123–125
- sinapsis, 7, 14, 30, 79
  - eléctrica, 16
  - excitatoria, 15, 30, 106, 109
  - inhibitoria, 15, 30, 74, 106, 109
  - química, 15
- sincronización, 17
  - de disparos, 49, 52, 56, 61, 62, 65, 68, 119
  - de potenciales, 17, 119
- sistema
  - combinado, 31
  - excitatorio, 31
  - inhibitorio, 31
- sistema dinámico, 29
  - bidimensional, 29
  - en el toro, 29
- soma, 7
- sub-umbral, 111
- teorema
  - de Denjoy-Schwarz, 37
  - de Hartman-Grossman, 20
  - de Liouville, 95
  - de Weierstrass, 77
  - del flujo tubular, 90, 92
- tiempo de relajación, 80
- tiempos de disparo, 45, 67, 77, 81, 85
  - fórmula, 96
  - primer instante, 82, 96
- transversal
  - flujo, 85
- umbral, 14, 23, 28, 42, 46, 74, 77, 105
- unidad dinámica, 73
- vértices, 49, 77
- valor crítico, 51
- variables, 12
  - de activación e inactivación, 12, 13
- zona contractiva, 116, 118–120