

COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE CÁLCULO DE SOLICITACIONES DE MADERA LIBRE DE DEFECTOS

COMPARISON OF STRUCTURAL RESPONSE CALCULATION METHODS FOR DEFECT-FREE TIMBER

Juan Perlas¹(P), Lucia Fiori¹, Pablo Castrillo², Vanesa Baño³, Jorge Pérez Zerpa⁴

1 Estudiante de Ingeniería Civil, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

2 Ing. Prof. Asistente, IET, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

3 Dr. Prof. Adjunto, IET, Fac. Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

4 MSc. Ing. Prof. Asistente, IET, Fac. Ingeniería, Universidad de la República, Uruguay

Dirección para correspondencia: juan.perlas@gmail.com; (P) Presentador

RESUMEN

En este trabajo se estudia el comportamiento de materiales anisótropos de ecuación constitutiva no lineal. Se centra el interés en materiales ortótropos con un comportamiento elástico lineal, pero de diferente rigidez a tracción que a compresión. Estas características son consideradas en el diseño de madera estructural, bajo ciertas hipótesis de carga.

Se consideran problemas de elasticidad con las hipótesis constitutivas mencionadas y se utiliza el método de elementos finitos para su resolución numérica. Para resolver la no linealidad del problema se presenta un método iterativo cuyos resultados son comparados con datos experimentales y teóricos para vigas de madera sin defectos. La resolución numérica es realizada utilizando programas libres implementados por los autores que trabajan con elementos finitos dentro del tramo elástico del comportamiento de la madera.

Se compararán los resultados de los modelos numéricos con datos experimentales y métodos aproximados de normas de cálculo. Los datos experimentales son obtenidos a partir de ensayos a flexión en 4 puntos la especie *Pinus sylvestris*.

Palabras-clave: madera, ortotropía, elasticidad

ABSTRACT

In this paper, the behavior of anisotropic materials with a non-linear constitutive equation is studied. Interest is focused on orthotropic materials with elastic and linear behavior, but different rigidity in tension than in compression. These traits are considered in the design of structural timber, under certain load hypotheses.

Elasticity problems with the aforementioned hypotheses are considered, and the finite element method is used for their numerical resolution. To resolve the non-linearity of the problem, an iterative method is presented, whose results are compared with experimental and theoretical data for timber beams free from defects. The numerical resolution is done by free software implemented by the authors, which works with finite elements within the elastic section of timber's behavior.

Results of the numerical models will be compared with experimental data and approximate methods from design norms. The experimental data is obtained from four-point bending testing on beams of *Pinus sylvestris* species.

Keywords: wood, orthotropy, elasticity

1. INTRODUCCIÓN

El estudio del comportamiento mecánico de materiales elásticos anisótropos empleados con fines estructurales ha motivado el desarrollo del presente trabajo.

Siendo la madera un ejemplo de este tipo de materiales, se plantea un interés adicional por presentar una herramienta de cálculo que permita modelar el comportamiento real de la madera en tramo elástico sobre el cual están referidas las normas actuales de madera.

2. ANTECEDENTES

2.1. MADERA ESTRUCTURAL

La madera se encuentra compuesta por fibras dispuestas en tubos ordenados en la dirección paralela al eje de crecimiento del árbol, lo que resulta en un caso de ortotropía de tipo cilíndrico. Existen además diferencias en el comportamiento mecánico dadas por la estructura diferenciada que existe en el tejido leñoso; tales como anillos de crecimiento estacionales y radios leñosos. Por lo tanto, las direcciones de ortotropía definidas por la constitución anatómica son: i) dirección longitudinal o paralela a la dirección de las fibras (eje del tronco); ii) dirección radial o perpendicular a los anillos de crecimiento y iii) dirección tangencial, tangente a los anillos de crecimiento y perpendicular al plano generado por las direcciones longitudinal y radial.

Las constantes elásticas del material, además de depender de la dirección considerada, varían según el tipo y edad del árbol, condiciones de crecimiento, humedad, defectos presentes, país de origen, naturaleza de las acciones y duración de las cargas. La presencia de irregularidades constitutivas en la madera, tales como nudos, hacen que aparezcan efectos locales que modifiquen el comportamiento mecánico de la pieza.

La ecuación constitutiva, que caracteriza el comportamiento mecánico, referida a los ejes de ortotropía $\{\vec{e}_L; \vec{e}_R; \vec{e}_T\}$ es la representada en la ecuación 1.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \varepsilon_T \\ \gamma_{LR} \\ \gamma_{LT} \\ \gamma_{RT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & -\frac{\nu_{TL}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & -\frac{\nu_{TR}}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & -\frac{\nu_{RT}}{E_R} & \frac{1}{E_T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{LT}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{RT}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \sigma_T \\ \tau_{LR} \\ \tau_{LT} \\ \tau_{RT} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Siendo, E_i la relación entre la tensión σ_i y la deformación ε_i en la dirección i
 G_{ij} la relación entre la tensión tangencial τ_{ij} y la distorsión γ_{ij}
 ν_{ij} la relación entre la deformación ε_i generada por la tensión σ_i con la deformación unitaria ε_j en la dirección j

En el caso de elasticidad bidimensional en la hipótesis de estado plano de tensiones en el plano $\{\vec{e}_L; \vec{e}_R\}$, la ecuación constitutiva es la representada en la ecuación 2.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \gamma_{LR} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E_L} & -\frac{\nu_{RL}}{E_R} & 0 \\ -\frac{\nu_{LR}}{E_L} & \frac{1}{E_R} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{LR}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \tau_{LR} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Siendo la relación inversa, en términos de la matriz de rigidez la ecuación 3.

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_R \\ \tau_{LR} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{LR} \cdot \nu_{RL}} \begin{pmatrix} E_L & \nu_{RL} \cdot E_R & 0 \\ \nu_{LR} \cdot E_R & E_R & 0 \\ 0 & 0 & G_{LR} \cdot (1 - \nu_{LR} \cdot \nu_{RL}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_R \\ \gamma_{LR} \end{pmatrix} \quad (3)$$

2.1.1. Bi-linealidad de la madera

La dirección longitudinal de las fibras en la madera presenta distinta respuesta mecánica ante los esfuerzos de tracción y compresión. Dicho comportamiento bi-lineal, hace que existan dos módulos de elasticidad, uno como respuesta a los esfuerzos de tracción y otro para los de compresión. Esta diferencia de módulos de elasticidad provoca un descenso de la línea neutra.

La relación entre la tensión y deformación en la dirección paralela a la fibra se puede apreciar en la Figura 1, donde σ_{rot-t} es la tensión de rotura a tracción, σ_{rot-c} es la tensión de rotura a compresión y σ_{el-c} es el límite elástico a compresión y ε son sus correspondientes deformación a tracción y a compresión.

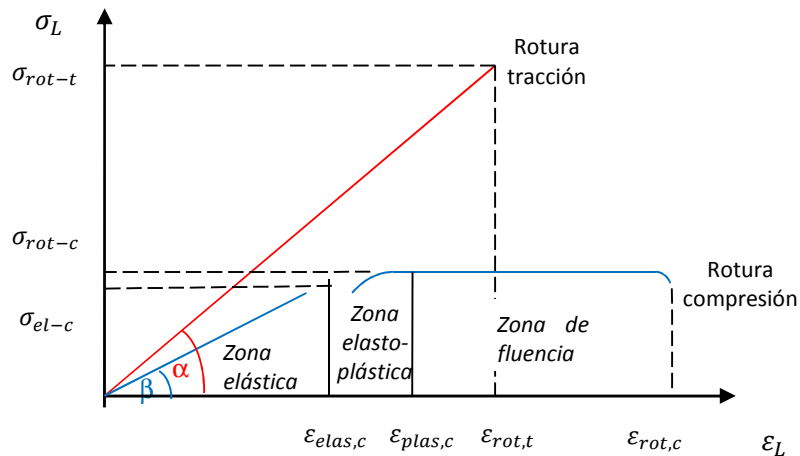


Figura 1. Diagrama tensión-deformación para la madera

La madera presenta un tramo elástico en su ecuación constitutiva tanto para la tracción como para la compresión y un tramo elasto-plástico para la compresión; en el cual el módulo de elasticidad instantáneo decrece al aumentar la deformación.

2.2.2. Relaciones empíricas en la madera

Debido a la gran heterogeneidad de especies de madera y variables que intervienen en las características elásticas que definen el comportamiento mecánico, son realizadas algunas simplificaciones y consideraciones en base a resultados empíricos.

Una simplificación que usualmente se realiza en la práctica de cálculo de estructuras de madera es considerar dos direcciones de ortotropía; la longitudinal y la transversal (radial y tangencial). Esto se debe a que las diferencias mecánicas entre las direcciones radial y tangencial son menos significativas que las existentes con relación a la dirección longitudinal, por lo que en general se consideran valores promedio entre G_{TL} y G_{LR} , como módulo de elasticidad transversal y valores promedio entre E_R y E_T , como módulo de elasticidad transversal perpendicular a las fibras.

Es posible hallar un módulo de elasticidad local medio aparente a partir de los módulos de tracción y compresión en la dirección longitudinal para los efectos locales de la madera. El problema surge en que, a partir de los ensayos, se presenta el problema inverso. Dado un módulo de elasticidad medio aparente, se deben definir dos módulos de elasticidad a compresión y a tracción tales que den lugar a un módulo aparente igual en valor al hallado. Para realizar esto, es necesario tener una relación entre dichos módulos. Esta relación entre el módulo de elasticidad a tracción y el módulo de elasticidad a compresión puede tomarse, para la madera de *P. sylvestris*, como $n = \frac{E_t}{E_c} = 1,2$ según Baño *et al.* (2012).

Se toman otras medidas empíricas en la modelación, las cuales sin embargo revisten menor importancia con respecto a los fenómenos a estudiar dado que se asocian con el efecto de cortante en las vigas, efecto que se desprecia en los estudios de flecha local. Las relaciones a utilizar según Argüelles y Arriaga (2000) y la norma UNE EN 384:2010, para determinar el módulo de elasticidad perpendicular a la fibra y el módulo de elasticidad transversal son las representadas en las ecuaciones 4.

$$E_{90} = \frac{E_0}{30} \quad ; \quad G = \frac{E_0}{16} \quad ; \quad \nu_{RL} = 0.025 \quad (4)$$

Siendo, E_{90} el módulo de elasticidad en la dirección perpendicular a las fibras

E_0 el módulo de elasticidad medio aparente definido anteriormente

G el módulo de elasticidad transversal

ν_{RL} el coeficiente de Poisson para coníferas

2.2. SIMULACIÓN NUMÉRICA MEDIANTE MEF

Si bien existe investigación al respecto de herramientas que permiten la modelación numérica de vigas de materiales anisótropos, las opciones comerciales a la hora de hacerlo son escasas y requieren conocimientos de programación del usuario en su funcionamiento. En el software usual para el cálculo de estructuras (como por ejemplo SAP 2000) solo se presentan modelos lineales para materiales anisótropos o modelos no lineales para materiales isotrópicos, sin poder concebir un material que presente tanto un comportamiento no lineal como un comportamiento anisótropo.

Aun cuando esta línea se ha investigado, los enfoques tienden a centrarse en las resistencias de la pieza en lugar de las deformaciones y los desplazamientos que ella puede soportar bajo cierto estado de carga. Esto es especialmente cierto en los estudios de madera, el material que se considera en este trabajo.

Dado que la madera es un material relativamente flexible, en el cual las flechas admisibles pueden ser críticas en el dimensionado de una pieza, y viendo que las normas internacionales exigen trabajar en el tramo elástico del diagrama tensión-deformación, surge naturalmente la necesidad de un software libre que trabaje con las deformaciones y desplazamientos para piezas en servicio con comportamiento elástico.

3. OBJETIVOS

En base a los antecedentes expuestos, se plantean los siguientes objetivos:

Generar un programa de cálculo de tensiones, deformaciones y reacciones para una viga en estado plano de tensiones, conformada por un material ortótropo con distinta rigidez a tracción y compresión.

Validar el programa a partir de valores experimentales y Teoría de vigas

4. METODOLOGÍA

Se implementó un modelo numérico que, mediante el método de los elementos finitos, permite determinar las tensiones y deformaciones de una viga sometida a flexión en el tramo elástico de la curva tensión-deformación. En la simulación se consideró, que el material podría no ser lineal en su ecuación constitutiva, considerando una relación bi-lineal entre tensiones y deformaciones, trabajando con diferente rigidez a compresión y a tracción

Los resultados se contrastaron con datos provenientes de ensayos experimentales de flexión en 4 puntos de la especie *Pinus sylvestris*. Se utilizaron las propiedades materiales de cada viga ensayada como entrada al software para verificar la exactitud de los resultados. Por otro lado, se realizó un desarrollo teórico mediante la teoría de vigas de forma de obtener resultados de desplazamientos para comparar. Para esto, se consideró una viga con dos materiales de diferente rigidez, con las mismas condiciones de borde que las vigas ensayadas.

A modo de uniformizar criterios, se trabajó siempre en la comparación de valores de flecha local. De esta forma se obtuvieron valores de desplazamientos que no se encuentren afectados por la deformación por cortante de la viga. Considerando un modelo de teoría de vigas, esta flecha está relacionada únicamente con el momento que se establece en la barra ensayada, por lo cual la teoría de vigas puede dar un resultado aproximado al real sin considerar cortante.

4.1. ENSAYOS EXPERIMENTALES

Se realizaron ensayos de flexión de cuatro puntos en vigas de porte real de la especie *P. sylvestris*. El ensayo fue realizado cumpliendo con las condiciones dadas por la Norma UNE EN 408:2010. El ensayo se realizó con la máquina “Wintest 32 – S.A.E. Ibertest”, modelo ELIB-100. La Figura 2, Fig. 2, representa el esquema de ensayo realizado.

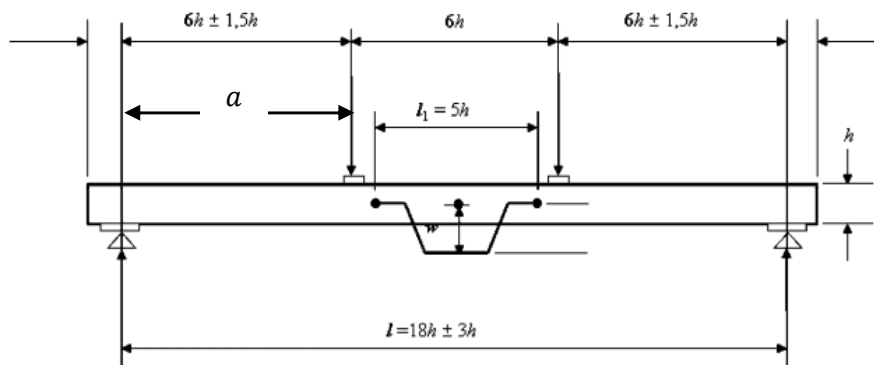


Figura 2. Descripción del ensayo realizado

El ensayo mencionado fue empleado para determinar los módulos de elasticidad de la pieza; para ello se midió la fuerza aplicada y la flecha en la sección central de la viga. Durante el ensayo se midieron tanto la flecha global, sujeta a efectos de cortante, como la flecha local, sujeta solo a efectos de momento flector. Se pudieron inferir de los valores de carga y de deformación, los módulos de elasticidad locales y globales según explicita la norma.

Se obtuvieron, además, los límites de rotura a flexión de cada viga. A partir de esta medida, se definió el tramo elástico como el sector del diagrama tensión-deformación que está comprendido entre el 10% y el 40% de la carga de rotura.

Para vigas de 3 m de longitud, se consideró una distancia entre apoyos de 2610mm, una distancia entre puntos de carga de 870mm y una distancia de 725 mm entre puntos de apoyo de la percha que sirve de sujeción del extensómetro para medición de la flecha.

En el presente trabajo, se consideró como dato únicamente la flecha local, por lo que el módulo de elasticidad que se obtuvo fue el local, que se corresponde con módulo de elasticidad local aparente, tal como se define en la norma. A partir de dicho módulo de elasticidad se hallaron los módulos de elasticidad para la parte de la madera traccionada y para la parte de la madera comprimida a partir de relaciones establecidas empíricamente.

4.3.1. Materiales

Se detalla en la Tabla 1 la geometría, procedencia, desviación general de la fibra y contenido de humedad de las vigas experimentales consideradas en el presente trabajo.

Tabla 1. Descripción de las vigas experimentales

VIGA 1		VIGA 2	
Descripción general		Descripción general	
Especie	<i>Pinus sylvestris</i>	Especie	<i>Pinus sylvestris</i>
Procedencia	Alemania	Procedencia	Alemania
Desviación de la fibra	1°	Desviación de la fibra	1,7°
Contenido de humedad	20%	Contenido de humedad	27%
Geometría de la viga		Geometría de la viga	
Longitud (m)	3	Longitud (m)	3
Espesor(m)	0,042	Espesor(m)	0,043
Altura(m)	0,141	Altura(m)	0,143

4.2. TEORÍA DE VIGAS

Si a una viga de un material con distinta rigidez a tracción y compresión, se la somete a flexión, se genera una desviación de la línea neutra respecto al eje de la sección.

En este tipo de vigas es posible determinar un valor de módulo de elasticidad aparente a los efectos del cálculo de la flechas.

4.2.1. Ubicación de la línea neutra

Para hallar la ubicación de la línea neutra se plantea el equilibrio de fuerzas horizontales en una sección de la viga sometida a momento puro (ecuación 5).

$$\frac{\sigma_c \cdot y \cdot b}{2} = \frac{\sigma_t \cdot (h - y) \cdot b}{2} \rightarrow \frac{\sigma_c}{\sigma_t} = \frac{(h - y)}{y} \quad (5)$$

Siendo, σ_c la tensión de compresión máxima de la fibra superior para la sección x

σ_t la tensión de tracción máxima de la fibra inferior para la sección x

y la posición de la línea neutra respecto a la fibra superior

b el ancho de la viga

h la altura de la viga

Trabajando en el tramo elástico, debido a la proporcionalidad lineal entre la tensión y la deformación en la dirección longitudinal se consideran las ecuaciones 6.

$$\sigma_c = E_c \cdot \varepsilon_c \quad ; \quad \sigma_t = E_t \cdot \varepsilon_t \quad (6)$$

Si se asume válida la hipótesis de Bernoulli que plantea que secciones planas y perpendiculares al eje de la viga se mantienen planas y perpendiculares al eje deformado (ecuación 7),

“Estructuras para el Desarrollo, la Integración Regional, y el Bienestar Social”

$$\frac{\varepsilon_c}{y} = \frac{\varepsilon_t}{h-y} \rightarrow \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_t} = \frac{y}{h-y} \quad (7)$$

Con las anteriores relaciones se determina la ecuación 8, cuyas soluciones se representan en la ecuación 9.

$$\frac{(h-y)^2}{y^2} = \frac{E_c}{E_t} \rightarrow \left(\frac{E_c}{E_t} - 1\right) \cdot y^2 + 2 \cdot h \cdot y - h^2 = 0 \quad (8)$$

$$y = \frac{(-E_t \pm \sqrt{(E_c * E_t)}) * h}{E_c - E_t} \quad (9)$$

Para que la raíz tenga sentido físico, se considera $y > 0$ e $y < h$, y asumiendo que $E_t > E_c$, el valor de y se presenta en la ecuación 10.

$$y = \frac{\sqrt{E_t} \cdot h}{(\sqrt{E_c} + \sqrt{E_t})} \quad (10)$$

4.2.2. Determinación de un módulo de elasticidad aparente

Para el desarrollo según la teoría de vigas, se trabaja con una viga recta con una cierta distribución de apoyos y esfuerzos transversales conocidos, sin considerar directas. Se asume que existe una relación conocida entre los módulos de elasticidad a compresión y a tracción (ecuación 11).

$$n = \frac{E_t}{E_c} \quad (11)$$

Para dichos materiales es posible determinar un módulo de elasticidad aparente. Se procede realizando equilibrio de momentos en una sección de la viga sometida a momento puro (ecuación 12).

$$M_{int} = M_{ext} = \frac{\sigma_c \cdot y \cdot b}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot h}{3}\right) \quad (12)$$

Siendo, σ_c la tensión de compresión máxima de la fibra superior para la sección x
 y la posición de la línea neutra respecto a la fibra superior
 b el ancho de la viga
 h la altura de la viga

Se trabaja en el tramo elástico y, por la proporcionalidad lineal entre la tensión y la deformación en la dirección longitudinal (ecuación 6), nuevamente se asume válida la hipótesis de Bernoulli para llegar a la ecuación 13.

$$\frac{\varepsilon_c}{y} = \frac{1}{\rho} \quad (13)$$

Siendo, ρ el radio de giro de la sección

“Estructuras para el Desarrollo, la Integración Regional, y el Bienestar Social”

Con las anteriores relaciones se obtiene la ecuación 14, por lo que se puede considerar como módulo de elasticidad local aparente el representado en la ecuación 15.

$$M = \left(\frac{4 \cdot E_c \cdot E_t}{(\sqrt{E_c} + \sqrt{E_t})^2} \right) \cdot \frac{I}{\rho} \quad (14)$$

$$E_0 = \left(\frac{4 \cdot E_c \cdot E_t}{(\sqrt{E_c} + \sqrt{E_t})^2} \right) \quad (15)$$

La expresión para la elástica de la viga está dada por la ecuación 16.

$$v(x) = \int \left(\int \frac{M(x)}{E_0 I} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \quad (16)$$

Siendo, x la coordenada lineal, $M(x)$ la función Momento, v la función flecha o función elástica, C_i constantes apropiadas que dependen de la condición de apoyos, I la inercia de la sección como si fuera un único material.

4.2.3. Aplicación

Dado que la ecuación determinada por teoría de vigas permite hallar la flecha global de cada punto de la viga, se debe realizar una diferencia entre la flecha del punto medio y la flecha del punto de referencia que fija el ensayo. Esto se debe a que se comparan flechas locales.

Para el caso de estudio, se tomarán los puntos $\frac{L}{2}$ y $\frac{13L}{36}$, siendo L la distancia entre los apoyos para medir la flecha local (ecuación 17).

$$f_{local} = v\left(\frac{L}{2}\right) - v\left(\frac{13L}{36}\right) \quad (17)$$

Para el ensayo de carga definido en la norma UNE EN 408:2010, la ecuación anterior resulta en la ecuación 18.

$$f_{local} = \frac{25}{15552} \frac{PL^3}{E_0 I} \quad (18)$$

Siendo, P la carga total aplicada sobre la viga, L la distancia entre los apoyos, E_0 el módulo de elasticidad local unificado, I la inercia de la sección

Como la teoría de vigas explicitada anteriormente no considera deformaciones por cortante, no hay perjuicio en realizar la simple resta entre los diferentes desplazamientos para hallar la flecha local que se desea.

4.3. SIMULACIÓN NUMÉRICA

Se utiliza un software de elementos finitos programado como un *script* sobre la plataforma libre GNU-Octave. El mismo tiene como entrada los datos del material que el usuario ingrese, teniendo en cuenta los módulos de elasticidad longitudinales a compresión y a tracción, módulo de elasticidad transversal, módulo de elasticidad radial y coeficiente de Poisson.

Para la modelación, se debe ingresar las dimensiones de la viga y se pueden cargar apoyos en cualquier parte de la viga que se desee. Pueden aplicarse tantas cargas puntuales, uniformes y trapezoidales como sea necesario.

4.1.1. Implementación

Para las dimensiones deseadas de la viga, se implementó un mallado regular de elementos triangulares generado automáticamente y se imponen las condiciones de borde a los nodos de los elementos generados.

A la hora de la resolución del sistema lineal asociado al problema, surge el inconveniente de que el sistema de ecuaciones planteado por el método de los elementos finitos para los materiales bilineales en su ecuación constitutiva, está dado por la ecuación 19.

$$K(u) \cdot u = F \quad (19)$$

Es de notar por tanto que, para la resolución se debe tener en consideración que la matriz de rigidez es función del vector u . Debido a que el estado tensional de los elementos del mallado es desconocido hasta que no es resuelto el problema, a priori no es posible asignarle a cada elemento su correspondiente matriz de rigidez.

4.1.2. Algoritmo

Para resolver el problema del estado tensional real de cada elemento, es necesario realizar una iteración, de manera de encontrar una solución que asegure el equilibrio global de la estructura. El primer paso fue asignarle a cada elemento una matriz de rigidez inicial. A partir de la matriz de rigidez global, se realiza una primera iteración en la cual ciertos elementos quedarán traccionados y ciertos elementos quedarán comprimidos. A partir de la iteración anterior, se redefine la matriz de rigidez de cada elemento según su comportamiento. Es decir, a los elementos traccionados en la iteración $n - 1$ se les asigna la matriz de rigidez de un elemento traccionado e ídem para los elementos comprimidos.

Para mejorar la posibilidad de que se obtenga convergencia, se emplea el método de Newton-Raphson para solucionar la no linealidad del sistema de ecuaciones dado por el método de los elementos finitos. El mismo tiene una convergencia cuadrática hacia la solución para un variado tipo de funciones. Se define un criterio de parada para la iteración basado en la diferencia relativa de los desplazamientos entre iteraciones, siendo éste dependiente de un factor ingresado por el usuario.

4.1.3. Aplicación

Se utilizó un mallado de 1440 elementos, con las dimensiones de cada viga y con cargas variables para obtener un recorrido de la función tensión-deformación para realizar una comparación. Se consideró un criterio de parada tal que la diferencia entre iteraciones de los desplazamientos sea menor al 1% de los mismos desplazamientos.

5. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

5.1 Resultados experimentales

Se presentan en la Tabla 2 los resultados experimentales del módulo de elasticidad longitudinal medio aparente (E_{local}) de las dos vigas ensayadas a flexión en cuatro puntos y los valores deducidos a partir de la relación $n = \frac{E_t}{E_c} = 1,2$. Para obtener las constantes materiales, se utilizaron los datos obtenidos mediante el procesamiento de los datos del ensayo según las pautas ya establecidas.

Tabla 2. Resultados experimentales de las vigas

VIGA 1		VIGA 2	
Módulos de elasticidad		Módulos de elasticidad	
E_{local} (kN mm ⁻²)	14,67	E_{local} (kN mm ⁻²)	13,74
E_t (kNmm ⁻²)	16,11	E_t (kN mm ⁻²)	15,08
E_c (kNmm ⁻²)	13,42	E_c (kN mm ⁻²)	12,57
E_R (kNmm ⁻²)	0,49	E_R (kN mm ⁻²)	0,458
ν_{RL}	0,025	ν_{RL}	0,025

Donde, E_t es el módulo de elasticidad a tracción en la dirección de las fibras, E_c es el módulo de elasticidad de compresión en la dirección de las fibras, E_R el módulo de elasticidad en la dirección radial, ν_{RL} es el coeficiente de Poisson para la tensión radial

5.2 Análisis de las flechas obtenidas por los tres métodos considerados

Se presentan en las Figuras 3 y 4, Fig. 3 y Fig. 4, el diagrama flecha-carga en tramo elástico para las vigas 1 y 2 según los tres métodos de obtención considerados: la Teoría de vigas, los resultados experimentales y la simulación numérica con el software desarrollado para el presente trabajo.

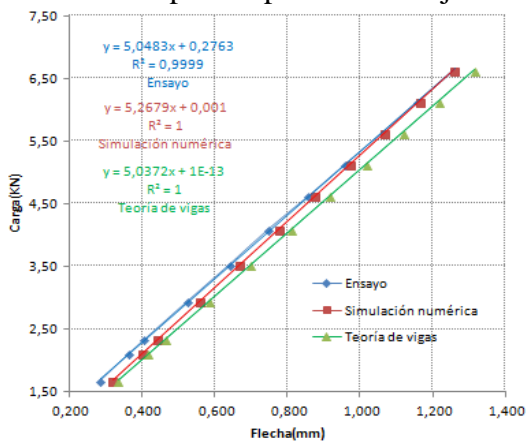


Figura 3. Diagrama flecha-carga viga 1

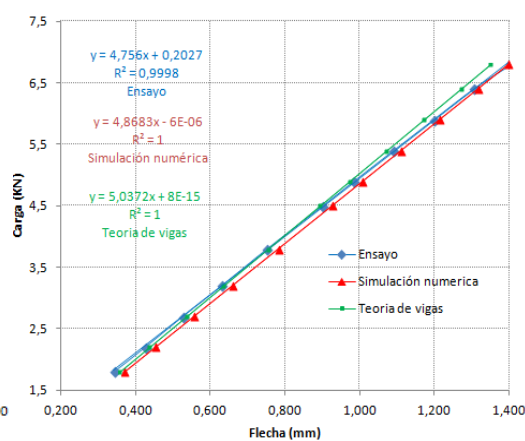


Figura 4. Diagrama flecha-carga viga 2

Las Tablas 3 y 4 presentan los valores de flecha para las vigas 1 y 2 respectivamente, obtenidas según los tres métodos de cálculo para diferentes condiciones de carga y los errores obtenidos con respecto a los resultados experimentales.

Tabla 3. Resultados de flecha para la viga 1

Fuerza(KN)	Flecha ensayo(mm)	Flecha simulación	Error simulación	Flecha Teoría vigas	Error Teoría vigas
1,68	0,286	0,319	11,5%	0,334	16,7%
2,11	0,364	0,400	9,9%	0,419	15,0%
2,34	0,408	0,444	8,8%	0,464	13,8%
2,95	0,527	0,560	6,3%	0,586	11,2%
3,53	0,642	0,671	4,4%	0,701	9,2%
4,10	0,750	0,778	3,7%	0,813	8,5%
4,62	0,860	0,878	2,0%	0,918	6,7%
5,14	0,962	0,974	1,3%	1,019	6,0%
5,64	1,064	1,070	0,6%	1,119	5,2%
6,13	1,161	1,165	0,3%	1,218	4,9%
6,63	1,263	1,259	0,3%	1,316	4,2%

Tabla 4. Resultados de flecha para la viga 2

Fuerza(KN)	Flecha ensayo (mm)	Flecha simulación	Error simulación	Flecha Teoría vigas	Error Teoría vigas
1,8	0,342	0,370	8,2%	0,357	4,5%
2,2	0,425	0,452	6,3%	0,437	2,7%
2,7	0,526	0,555	5,5%	0,536	2,0%
3,2	0,630	0,657	4,3%	0,635	0,8%
3,8	0,752	0,781	3,8%	0,754	0,3%
4,5	0,901	0,924	2,6%	0,893	0,8%
4,9	0,984	1,007	2,2%	0,973	1,2%
5,4	1,091	1,109	1,7%	1,072	1,7%
5,9	1,198	1,212	1,2%	1,171	2,2%
6,4	1,305	1,315	0,7%	1,271	2,7%
6,8	1,406	1,397	0,7%	1,350	4,0%

La primera viga, presenta una pendiente obtenida numéricamente con un error respecto al ensayo del 4.3%. La pendiente obtenida mediante teoría de vigas presenta un error de 0.2%. El programa implementado tuvo un máximo error de 11%.

La segunda viga presentó errores relativos bastante pequeños, donde el mayor error en tramo elástico fue de 4.5% para la flecha teórica y de 8,2% para la flecha de programa. La discrepancia en la pendiente de la flecha teórica fue de 5,9% mientras que la misma para la flecha de programa fue 2,3%.

En el programa implementado, se modeló tanto con el módulo de elasticidad medio aparente como con módulos de elasticidad independientes para tracción y compresión considerando la relación anteriormente expuesta de $n = \frac{E_t}{E_c} = 1,2$. Para todos los casos, se encontró que la diferencia introducida por el cambio de modelo era totalmente

insignificante. Para cada uno de los modelos, la flecha daba exactamente el mismo valor para un mismo estado de carga.

4.3 Obtención de las tensiones de la viga a partir del modelo numérico

El software desarrollado permite que, para cada iteración del programa, se generen salidas gráficas de las tensiones de la estructura y obtener la ubicación de la fibra neutra. A modo de ejemplo se presentan en la Figura 5, Fig. 5., las tensiones normales longitudinales, tensiones perpendiculares a la fibra y tensiones rasantes, obtenidas para la viga 2 para una aplicación de carga de 6800 N, correspondiente a la carga de rotura de dicha viga. El color rojo representa la máxima tensión de tracción y el color azul oscuro la máxima compresión, suponiendo que el comportamiento fuese elástico hasta rotura.

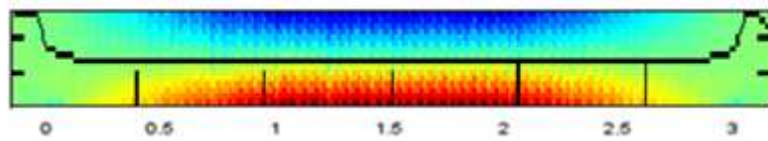


Figura 5. Gráfica del programa para tensiones longitudinales



Figura 6. Gráfica del programa para tensiones perpendiculares a la fibra

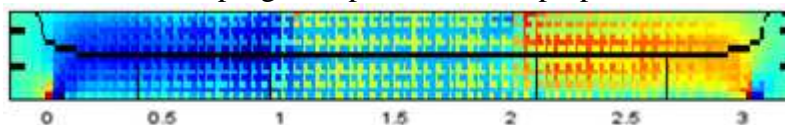


Figura 7. Gráfica del programa para tensiones rasantes

Con el programa desarrollado es posible observar que las tensiones máximas de compresión son muy pequeñas en relación a las de tracción. Esto ocurre de forma de poder compensar el momento que se ejerce mediante el descenso de la línea neutra. En general, observando la serie de datos, se comprueba que a partir de que la relación entre los módulos de elasticidad menor a 0,5 las tensiones de tracción aumentan rápidamente, posiblemente generando problemas por la tracción del material.

También es posible obtener la deformada de la estructura bajo el estado de cargas ensayado, representando en la Figura 8, Fig. 8, la deformada correspondiente al estado de carga anterior para la viga 2.

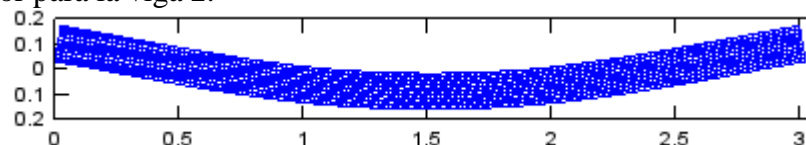


Figura 8. Representación del software de deformada para la carga de rotura de la viga 2 con un factor de escala de 100

4.4. Discusión sobre los errores de flecha obtenidos

Se puede señalar, en primer lugar, que se está trabajando con un material elasto-plástico con una gran variabilidad en los resultados, por lo cual una determinada viga puede presentar errores en un modelo que generalmente da buenos resultados.

Se trabaja con relaciones empíricas que pueden o no ser aplicables a cada especie y a cada probeta en particular. Los errores inherentes a todo proceso de medición también pueden generar algunos de los errores en la comparación de resultados.

El mallado generado por el programa de cálculo influye en la flecha obtenida, ya que con una mayor densificación del mallado, se asemeja cada vez más a la realidad. A su misma vez, el mallado define los nodos donde pueden colocarse los apoyos, los cuales generan una gran variabilidad en los resultados. En todo momento, se apuntó a que el programa representara lo más fiel posible la situación de los ensayos, pero también existen limitaciones dadas por el mallado máximo posible debido a la memoria del ordenador. Se plantea, por lo tanto, la necesidad de futuras investigaciones en relación al tamaño de malla y geometría de la misma.

En adición a ensayar las discrepancias entre los ensayos y los modelos establecidos, se experimentó con la influencia que tienen algunas variables en el modelo numérico desarrollado por elementos finitos. En un primer lugar, como ya se mencionó, se ensayó el rol que juega el módulo de elasticidad longitudinal medio aparente en contraposición a los módulos de elasticidad independientes de tracción y de compresión, observándose que la diferencia entre las flechas de los dos modelos era nula. A continuación, se experimentó con el módulo de Poisson de la pieza, observándose que la variación del mismo no influía en los resultados de flecha local.

Por último, se experimentó con la relación empírica utilizada para el módulo de elasticidad perpendicular a la fibra mencionada anteriormente. Se ensayó para varios valores de E_{90} con respecto a E_0 , encontrándose que tampoco este valor influía en el valor de la flecha local. Esto tiene sentido ya que al medirse la flecha local, se desprecia cualquier tensión que pueda existir en la vertical, haciendo que el valor de E_{90} sea irrelevante a la hora de evaluar dicho valor de flecha.

Es, sin embargo, de suma importancia la diferencia que se produce en las tensiones al variar la relación entre módulos de elasticidad, pudiéndose observar con el programa la desviación de la línea neutra.

5. CONCLUSIONES

Se generó, mediante la programación por elementos finitos en un software libre una herramienta que modela de comportamiento de vigas de madera estructural que tiene en cuenta la anisotropía y el comportamiento no lineal de la misma en el tramo elástico.

Se calculó el error relativo de flecha para vigas sometidas a flexión que se obtiene al considerar modelos computacionales y modelos teóricos concurrentemente con ensayos de caracterización de probetas de madera.

Se observó la influencia que tienen distintas variables sobre los resultados computacionales para los valores de flecha local obtenidos de ensayos con probetas reales, concluyendo que los valores de n , de E_{90} y la elección de modelo entre un módulo de elasticidad medio aparente y la consideración de los módulos independientes de tracción y de compresión no tienen influencia en el resultado de la flecha local obtenida.

6. AGRADECIMIENTOS

Quisiéramos agradecer el apoyo de la Comisión Sectorial de Investigación Científica (CSIC).

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Argüelles, R. y Arriaga, F. (2000) *Estructuras de madera. Diseño y cálculo. 2ª ed.* AITIM. Madrid, España.

Baño, V. (2009). *Análisis mediante simulación numérica de la pérdida de resistencia de la madera por la presencia de nudos.* Tesis Doctoral, Universidad de Santiago de Compostela, Lugo, España.

Baño, V.; Argüelles Bustillo, R.; Regueira, R. y Guaita, M. (2012) *Determinación de la curva tensión-deformación en madera de ‘Pinus sylvestris’ L. para la simulación numérica de vigas de madera libre de defectos.* Materiales de Construcción Vol. 62, 306, 269, 284

AENOR (2010) UNE EN 1991 1-1: 2006/A1. *Eurocódigo 5: Proyecto de Estructuras de Madera. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para la edificación.* AENOR. Madrid, España

AENOR (2011) UNE EN 408. *Madera estructural. Madera aserrada y madera laminada encolada para uso estructural. Determinación de algunas propiedades físicas y mecánicas.* Madrid, España

AENOR (2010) UNE EN 384. *Madera estructural. Determinación de los valores característicos de las propiedades mecánicas y la densidad.* Madrid, España

Mascia, N. y Lahr F. (2006) *Remarks on Orthotropic Elastic Models Applied to Wood.* Materials Research, Vol. 9 No. 3, 301-310

Saavedra Flores, E. (2011) *Multi-scale constitutive model for a wood-inspired composite.* Procedia Engineering 10 (2011) 3616-3621